CAPITULO 17

Ecuaciones diferenciales ordinarias

17.1 INTRODUCCION

Las ecuaciones que implican una función y su derivada se llaman *ecuaciones diferenciales*. Los siguientes son ejemplos de ecuaciones diferenciales:

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - x = 0 \tag{17.1}$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 6\frac{d^2x}{dt^2} + 11\frac{dx}{dt} + 6x = 0 \tag{17.2}$$

$$-\tfrac{1}{5}t^3\frac{d^3x}{dt^3} + \tfrac{1}{2}t^2\frac{d^2x}{dt^2} - t\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{17.3}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}x = 0 \tag{17.4}$$

El *orden* de una ecuación diferencial se refiere a la derivada más alta. Las ecuaciones 17.1 y 17.4 son de segundo orden, ya que la derivada más alta de x es la segunda, mientras que las ecuaciones 17.2 y 17.3 son de tercer orden. Las ecuaciones se clasifican también como lineales o no lineales. Una ecuación es *lineal* si no contiene productos o potencias de x y de sus derivadas. Las ecuaciones 17.1 a 17.3 son todas lineales, mientras que la ecuación 17.4 es no lineal. Note que conforme a esta definición, el coeficiente de x o de sus derivadas puede depender de la variable independiente, como en la ecuación 17.3. Es mucho más fácil resolver las ecuaciones lineales que las ecuaciones no lineales. En la sección 15.10 se estudiaron las ecuaciones lineales de primer orden y, en la sección 15.9, las ecuaciones de primer orden no lineales, las cuales son separables.

17.2 PROPIEDADES GENERALES

Las ecuaciones diferenciales de la forma de las ecuaciones 17.1 a 17.4, en donde cada término contiene a la variable dependiente, x, o su derivada, se conocen como *homogéneas* (este término solamente es exacto para las ecuaciones lineales, pero se empleará en forma general).

Existe una relación íntima entre las ecuaciones homogéneas diferenciales de enésimo orden y las ecuaciones algebraicas de enésimo orden. Por ejemplo, como la ecuación algebraica, la ecuación diferencial de enésimo orden tiene n soluciones. Esto se establecerá a continuación en forma general, pero por ahora únicamente, se presentarán las soluciones a las ecuaciones que se dieron como ejemplo, y se sugiere que el lector sustituya los valores en ellas y verifique que en realidad se satisfacen:

Ecuación 17.1 $\quad x = e^{t/2}$ o e^{-t}

Ecuación 17.2 $\quad x = e^{-t}, e^{-2t}$, o e^{-3t}

Ecuación 17.3 $\quad x = t, t^2$, o $t^{5/2}$

Ecuación 17.4 $\quad x = 1$ o $-2t^{-1}$

Las ecuaciones lineales tienen otras **propiedades**, si la solución se denota como x_h, entonces Cx_h, donde C es cualquier constante, también es una solución. Considere por ejemplo la ecuación 17.1. Si e^{-t} es una solución, entonces Ce^{-t}, también lo es, ya que:

$$\frac{dx}{dt} = C\frac{dx_h}{dt} = -Ce^{-t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = C\frac{d^2x_h}{dt^2} = Ce^{-t}$$

Por consiguiente:

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - x = 2Ce^{-t} - Ce^{-t} - Ce^{-t} = 0$$

La ecuación lineal homogénea general de enésimo orden se escribe como:

$$a_n(t)\frac{d^nx}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = 0 \tag{17.5}$$

Si x_h representa una solución, entonces haciendo $x = Cx_h$

$$a_n(t)\frac{d^nx}{dt^n} = Ca_n(t)\frac{d^nx_h}{dt^n}, \qquad a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = Ca_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x_h}{dt^{n-1}}, \ldots$$

y la ecuación 17.5 puede escribirse:

$$Ca_n(t)\frac{d^nx_h}{dt^n} + Ca_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x_h}{dt^{n-1}} + \cdots + Ca_1(t)\frac{dx_h}{dt} + Ca_0(t)x_h$$

$$= C\left[a_n(t)\frac{d^nx_h}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x_h}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dx_h}{dt} + a_0(t)x_h\right] = 0$$

puesto que el término que está entre paréntesis rectangulares es simplemente el miembro izquierdo de la ecuación 17.5, de la cual x_h es una solución. Esto establece el resultado de que *cualquier solución de una ecuación lineal homogénea puede ser* ***multiplicado por una constante arbitraria y seguir siendo una solución.***

Por lo general, este resultado no se extiende a ecuaciones no lineales. Considere la ecuación 17.4, que tiene una solución $x_h = -2t^{-1}$. Un múltiplo arbitrario sería $x = Ct^{-1}$, en cuyo caso:

$$\frac{dx}{dt} = -Ct^{-2}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 2Ct^{-3}, \qquad x\frac{dx}{dt} = -C^2t^{-3}$$

de manera que;

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}x = 2Ct^{-3} + C^2t^{-3}$$

que es igual a cero solamente para $C = -2$, el valor dado, y el caso sencillo $C = 0$.

Existe una segunda propiedad de importancia de las ecuaciones lineales homogéneas. Si se tienen dos soluciones, por ejemplo x_{h1} y x_{h2}, entonces cualquier combinación lineal es también una solución. Se establecerá esto para la ecuación general 17.5. Sea:

$$x = C_1x_{h1} + C_2x_{h2}$$

en cuyo caso:

$$\frac{dx}{dt} = C_1\frac{dx_{h1}}{dt} + C_2\frac{dx_{h2}}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = C_1\frac{d^2x_{h1}}{dt^2} + C_2\frac{d^2x_{h2}}{dt^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^nx}{dt^n} = C_1\frac{d^nx_{h1}}{dt^n} + C_2\frac{d^nx_{h2}}{dt^n}$$

Sustituyendo en la ecuación 17.5, el miembro izquierdo se convierte en:

$$a_n(t)\left[C_1\frac{d^nx_{h1}}{dt^n} + C_2\frac{d^nx_{h2}}{dt^n}\right]$$

$$+ a_{n-1}(t)\left[C_1\frac{d^{n-1}x_{h1}}{dt^{n-1}} + C_2\frac{d^{n-1}x_{h2}}{dt^{n-1}}\right] + \cdots$$

$$+ a_1(t)\left[C_1\frac{dx_{h1}}{dt} + C_2\frac{dx_{h2}}{dt}\right] + a_0(t)[C_1x_{h1} + C_2x_{h2}]$$

$$= C_1\left[a_n(t)\frac{d^nx_{h1}}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x_{h1}}{dt^{n-1}} + \cdots\right.$$

$$+ a_1(t)\frac{dx_{h1}}{dt} + a_0(t)x_{h1}\bigg]$$

$$+ C_2\left[a_n(t)\frac{d^n x_{h2}}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x_{h2}}{dt^{n-1}} + \cdots\right.$$

$$\left. + a_1(t)\frac{dx_{h2}}{dt} + a_0(t)x_{h2}\right] = 0$$

La ecuación se satisface porque los coeficientes de C_1 y C_2 son cada uno soluciones y, por consiguiente, los paréntesis rectangulares son iguales a cero. *Si se tienen n soluciones a las ecuaciones homogéneas lineales de enésimo orden, representadas como $x_{h1}, x_{h2}, \ldots, x_{hn}$, entonces puede escribirse una solución general de la forma:*

$$x = C_1x_{h1} + C_2x_{h2} + \cdots + C_nx_{hn}$$

Las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ representan las n constantes de integración que se obtienen al integrar la ecuación de enésimo orden. Por ejemplo, una solución general a la ecuación 17.3 sería

$$x(t) = C_1t + C_2t^2 + C_3t^{5/2}$$

Note que las soluciones a la ecuación 17.4 no pueden sumarse debido a la no linealidad.

17.3 ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Cuando los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son *constantes*, las n soluciones a las ecuaciones lineales homogéneas pueden encontrarse en forma sencilla. Se tiene:

$$a_n\frac{d^nx}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = 0 \tag{17.6}$$

Por consiguiente, a todos los valores de t, la misma combinación lineal de x y de sus derivadas debe sumar cero. Esta proporcionalidad entre una función y sus derivadas, sugiere un comportamiento exponencial. Por consiguiente, se busca una solución de la forma:

$$x = e^{mt}$$

Entonces:

$$\frac{dx}{dt} = me^{mt}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = m^2e^{mt}, \ldots, \frac{d^nx}{dt^n} = m^ne^{mt}.$$

y el miembro izquierdo de la ecuación 17.6 se convierte en:

$$a_nm^ne^{mt} + a_{n-1}m^{n-1}e^{mt} + \cdots + a_1me^{mt} + a_0e^{mt} = 0$$

o, factorizando e^{mt},

$$e^{mt}[a_nm^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1m + a_0] = 0$$

Puesto que e^{mt} no puede desaparecer, el paréntesis rectangular debe ser igual a cero. *Por consiguiente e^{mt} es una solución a la ecuación 17.6 si y sólo si m es una solución de la ecuación algebraica:*

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0 \tag{17.7}$$

La ecuación 17.7 se conoce como la *ecuación característica*, y sus raíces se denominan *valores característicos*. Note que las ecuaciones características pueden escribirse inspeccionando las diferentes ecuaciones algebraicas, y sustituyendo $d^k x/dt^k$ por m^k. La ecuación 17.7 es una ecuación algebraica de enésimo orden con n raíces. Si estas raíces se representan como $m_1, m_2, \ldots, m_n$ entonces:

$$x_{h1} = e^{m_1 t}, x_{h2} = e^{m_2 t}, \cdots, x_{hn} = e^{m_n t}$$

y la solución general a la ecuación 17.7 es:

$$x(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} + \cdots + C_n e^{m_n t}$$

Ejemplo 17.1

La ecuación característica que corresponde a la ecuación 17.1 es

$$2m^2 + m - 1 = 0$$

con raíces $m = 1/2, -1$. Por consiguiente:

$$x(t) = C_1 e^{t/2} + C_2 e^{-t}$$

Ejemplo 17.2

La ecuación característica que corresponde a la ecuación 17.2 es

$$m^3 + 6m^2 + 11m + 6 = 0$$

con raíces $m = -1, -2, -3$. Por consiguiente:

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-3t}$$

Ejemplo 17.3

$$\frac{dx}{dt} - kx = 0$$

Esta ecuación lineal es una ecuación separable de primer orden que se resolvió en la sección 15.9. La técnica que se desarrolla aquí produce una ecuación característica:

$$m - k = 0$$

$$m = +k$$

$$x(t) = Ce^{kt}$$

17.4 RAICES CARACTERISTICAS COMPLEJAS

La ecuación característica podría tener raíces complejas o imaginarias. Si una raíz es compleja, entonces su complejo conjugado también debe ser una raíz. Si se divide una raíz compleja en sus partes reales e imaginarias y se escribe:

$$m = m_R + im_I$$

Donde m_R y m_I son números reales e. $i = \sqrt{-1}$. Entonces:

$$m = m_R - im_I$$

también es una raíz y la solución incluye los términos:

$$x(t) = C_1 e^{[m_R + im_I]t} + C_2 e^{[m_R - im_I]t}$$

La exponencial imaginaria puede expresarse en términos de seno y coseno, utilizando las relaciones definidas en la sección 15.3:

$$\begin{aligned} e^{im_I t} &= 1 + im_I t + \frac{[im_I t]^2}{2!} + \frac{[im_I t]^3}{3!} + \frac{[im_I t]^4}{4!} + \frac{[im_I t]^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{[m_I t]^2}{2!} + \frac{[m_I t]^4}{4!} + \cdots \\ &\quad + i\left\{m_I t - \frac{[m_I t]^3}{3!} + \frac{[m_I t]^5}{5!} + \cdots\right\} \\ &= \cos m_I t + i \operatorname{sen} m_I t \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{m_R t}[\cos m_I t + i \operatorname{sen} m_I t] + C_2 e^{m_R t}[\cos m_I t - i \operatorname{sen} m_I t] \\ &= [C_1 + C_2] e^{m_R t} \cos m_I t + i[C_1 - C_2] e^{m_R t} \operatorname{sen} m_I t \end{aligned}$$

Puesto que $C_1 + C_2$ e $i[C_1 - C_2]$ son simplemente constantes, los términos $e^{m_R t}$ coseno de $m_I t$ y $e^{m_R t}$ seno de $m_I t$ deben ser soluciones a la ecuación homogénea. Por consiguiente, cuando se tienen raíces complejas, las soluciones homogéneas correspondientes son:

$$x_h = e^{m_R t} \cos m_I t, \; e^{m_R t} \operatorname{sen} m_I t$$

Ejemplo 17.4

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda^2 x = 0$$

La ecuación característica es:

$$\begin{aligned} &m^2 + \lambda^2 = 0 \\ &m = i\lambda, \; -i\lambda \\ &m_R = 0, \qquad m_I = \lambda \end{aligned}$$

Por consiguiente, la solución puede escribirse como:

$$x(t) = C_1 e^{i\lambda t} + C_2 e^{-i\lambda t}$$

ó

$$x(t) = K_1 \cos \lambda t + K_2 \operatorname{sen} \lambda t$$

donde, por supuesto, C y K son constantes diferentes.

Ejemplo 17.5

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} - 2x = 0$$

$$m^3 - 3m^2 + 4m - 2 = 0$$

$$m = 1, 1 + i, 1 - i$$

$$m_R = 1, \qquad m_I = 1$$

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{[1+i]t} + C_3 e^{[1-i]t}$$

ó

$$x(t) = K_1 e^t + K_2 e^t \cos t + K_3 e^t \operatorname{sen} t$$

17.5 CONSTANTES DE INTEGRACION

Las constantes de integración se evalúan mediante la información especificada acerca del sistema en tiempos *particulares*.

Ejemplo 17.6 (ecuación 17.1)

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - x = 0$$

$$x = 1 \quad \text{en} \quad t = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -2 \quad \text{en} \quad t = 0$$

$$x(t) = C_1 e^{t/2} + C_2 e^{-t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \tfrac{1}{2} C_1 e^{t/2} - C_2 e^{-t}$$

en $t = 0$ $\qquad x = C_1 + C_2 = 1$

$$\frac{dx}{dt} = \tfrac{1}{2} C_1 - C_2 = -2$$

$$C_1 = -\tfrac{2}{3}, \qquad C_2 = +\tfrac{5}{3}$$

$$x(t) = -\tfrac{2}{3} e^{t/2} + \tfrac{5}{3} e^{-t}$$

Ejemplo 17.7 (ecuación 17.1)

$$x = 1 \quad \text{en} \quad t = 0$$

$$x = 2 \quad \text{en} \quad t = 1$$

$$x(t) = C_1 e^{t/2} + C_2 e^{-t}$$

$$x(t) = C_1 e^{t/2} + C_2 e^{-t}$$

en $t = 0$ $\quad x = C_1 + C_2 = 1$

en $t = 1$ $\quad x = C_1 e^{1/2} + C_2 e^{-1} = 2$

$$C_1 = \frac{2 - e^{-1}}{e^{1/2} - e^{-1}}, \qquad C_2 = \frac{e^{1/2} - 2}{e^{1/2} - e^{-1}}$$

$$x(t) = \frac{2 - e^{-1}}{e^{1/2} - e^{-1}} e^{t/2} + \frac{e^{1/2} - 2}{e^{1/2} - e^{-1}} e^{-t}$$

Ejemplo 17.8

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} - 2x = 0 \qquad \text{en } t = 0 \quad x = 1, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 3$$

En base al ejemplo 17.5:

$$x(t) = K_1 e^t + K_2 e^t \cos t + K_3 e^t \operatorname{sen} t$$

$$\frac{dx}{dt} = K_1 e^t + K_2 e^t \cos t - K_2 e^t \operatorname{sen} t + K_3 e^t \operatorname{sen} t + K_3 e^t \cos t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = K_1 e^t - 2K_2 e^t \operatorname{sen} t + 2K_3 e^t \cos t$$

en $t = 0$ $\quad x = K_1 + K_2 = 1$

$$\frac{dx}{dt} = K_1 + K_2 + K_3 = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = K_1 + 2K_3 = 3$$

$$K_1 = 5, \qquad K_2 = -4, \qquad K_3 = -1$$

$$x(t) = 5e^t - 4e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t$$

Cuando se da toda la información en un tiempo particular—por ejemplo, $t = 0$— el problema se denomina un *problema de valor inicial.* Cuando se trabaja con más de un tiempo, se tiene un *problema de límite de valor* o *de valor en la frontera.* Hay algunas diferencias en comportamiento, pero la mayoría quedan fuera de este estudio introductorio.

17.6 RAICES REPETIDAS

Las ecuaciones características pueden tener raíces repetidas, en cuyo caso se obtienen solamente n - 1 soluciones a la ecuación diferencial homogénea. Puesto que se necesitan n soluciones para obtener una solución general con n constantes de integración, debe obtenerse otra solución homogénea. El siguiente procedimiento no es del todo riguroso, pero sugiere la forma correcta que puede verificarse sustituyendo en la ecuación.

Considere el caso cuando dos raíces son casi idénticas, y llámense éstas m_1 y $m_2 = m_1 + \varepsilon$. La solución contiene entonces términos:

$$x(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{[m_1+\varepsilon]t} + \cdots$$

Puesto que cualquier combinación lineal de soluciones homogéneas es también una solución homogénea, puede escribirse la solución en términos de constantes diferentes K_1 y K_2 en la forma:

$$x(t) = K_1 e^{m_1 t} + K_2 \left\{\frac{e^{[m_1+\varepsilon]t} - e^{m_1 t}}{\varepsilon}\right\} + \cdots$$

El segundo término es un cociente de diferencia y tiende a la derivada en el límite a medida que $m_2 \to m_1$ y $\varepsilon \to 0$. Por consiguiente, se tiene

$$\varepsilon \to 0: \quad x(t) = K_1 e^{m_1 t} + K_2 \frac{d}{dm_1}\{e^{m_1 t}\} + \cdots$$

ó

$$x(t) = K_1 e^{m_1 t} + K_2 t e^{m_1 t} + \cdots$$

Es decir, si m_1 es una raíz repetida, entonces $te^{m_1 t}$ también es una solución a la ecuación homogénea. En general, *si una raíz m es repetida k veces, entonces e^{mt}, te^{mt}, $t^2e^{mt}, \ldots, t^{k-1}e^{mt}$ son k soluciones independientes a la ecuación homogenea.*

Ejemplo 17.9

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 4\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} - 2x = 0$$

$$m^3 - 4m^2 + 5m - 2 = 0$$

$$m = +1, +1, +2$$

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 te^t + C_3 e^{2t}$$

Ejemplo 17.10

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 6\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} - 8x = 0$$

$$m^3 - 6m^2 + 12m - 8 = 0$$

$$m = +2, +2, +2$$

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 te^{2t} + C_3 t^2 e^{2t}$$

17.7 ECUACION LINEAL NO HOMOGENEA

La ecuación diferencial lineal general de orden enésimo se escribe:

$$a_n(t)\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = f(t) \tag{17.8}$$

donde $f(t)$ se conoce como la *función forzante.* El caso homogéneo de la ecuación 17.5, corresponde a $f(t) = 0$. Una solución a la ecuación 17.8 que satisface las n condiciones especificadas en tiempos particulares se encuentra mediante aproximación indirecta de la obtención de n soluciones homogéneas, $x_{h1}(t), x_{h2}(t), \ldots, x_{hn}(t)$, y una solución *arbitraria* de la ecuación 17.8, expresada como $x_p(t)$ para una *solución particular.* Será más fácil encontrar una solución arbitraria que una solución que satisfaga n condiciones adicionales. Entonces, la solución es

$$x(t) = C_1 x_{h1}(t) + C_2 x_{h2}(t) + \cdots + C_n x_{hn}(t) + x_p(t) \tag{17.9}$$

Se puede verificar fácilmente que la ecuación 17.9 es una solución a la ecuación 17.8 debido a la linealidad de la ecuación. Entonces, las constantes de integración $C_1, C_2, \ldots, C_n$ se escogen para satisfacer las n condiciones extra.

Ejemplo 17.11

$$-\tfrac{1}{5}t^3\frac{d^3x}{dt^3} + \tfrac{1}{2}t^2\frac{d^2x}{dt^2} - t\frac{dx}{dt} + x = t^3$$

$$\text{en } t = 1, \qquad x = \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

Cuando $f(t) = 0$, esto es la ecuación 17.3 para la cual existen tres soluciones homogéneas, t, t^2, y $t^{5/2}$. Es fácil verificar una solución particular para $f(t) = t^3$ y ésta es $-5t^3$. Note que esta solución particular no satisface ninguna de las condiciones impuestas cuando $t = 1$. Entonces la solución general es:

$$x(t) = C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^{5/2} - 5t^3$$

como puede verificarse por sustitución la ecuación anterior. Las constantes de integración se evalúan a partir de las condiciones cuando $t = 1$:

$$\text{en } t = 1, \qquad x = C_1 + C_2 + C_3 - 5 = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = C_1 + 2C_2 + \tfrac{5}{2}C_3 - 15 = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2C_2 + \tfrac{15}{4}C_3 - 30 = 0$$

las cuales pueden resolverse para obtener $C_1 = 5/3$, $C_2 = -10$, $C_3 = 40/3$. La solución completa que satisface la ecuación diferencial y las condiciones iniciales es la siguiente:

$$x(t) = \tfrac{5}{3}t - 10t^2 + \tfrac{40}{3}t^{5/2} - 5t^3$$

Deberá hacerse notar una importante propiedad que se deriva de la linealidad, y ésta es que si se tienen dos diferentes funciones forzantes, es decir, $f_1(t)$ y $f_2(t)$, y $x_{p1}(t)$ y $x_{p2}(t)$ son soluciones particulares correspondientes a $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente; entonces una solución particular correspondiente a $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ será la siguiente $x_p(t) = x_{p1}(t) + x_{p2}(t)$.

17.8 METODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS.

El método de coeficientes indeterminados es un procedimiento para obtener soluciones particulares con dos restricciones:

1. Los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son *constantes* en la ecuación 17.8.
2. La función $f(t)$ está formada solamente de términos que son cada uno productos de potencias de t, exponenciales, y senos y cosenos.

La segunda limita las situaciones para las cuales pueden obtenerse soluciones, pero el método es tan sencillo que es importante conocerlo.

El método para calcular $x_p(t)$ es como sigue:

1. Haciendo que $\phi(t)$ sea un término típico en $f(t)$. Igualando:

$$x_p(t) = \beta_0\phi + \beta_1 \frac{d\phi}{dt} + \beta_2 \frac{d^2\phi}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^3\phi}{dt^3} + \cdots \tag{17.10}$$

   (Para los tipos de funciones a las cuales se aplica el método la serie tendrá un número finito de términos.)

2. Sustituya $x_p(t)$ en la ecuación 17.8 y calcule $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ igualando coeficientes de términos semejantes.

Se hará una demostración mediante el siguiente ejemplo, y para simplificación algebraica, se considerará únicamente el caso en que $n = 2$ con $a_2 = 1$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

aunque es evidente que el método se aplica a cualquier n.

Ejemplo 17.12

$$f(t) = \text{constante} = A_0$$

Las derivadas de A_0 son todas cero, de tal manera que:

$$x_p(t) = \beta_0, \qquad \frac{dx_p}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$a_0\beta_0 = A_0$$

$$\beta_0 = \frac{A_0}{a_0}$$

$$x(t) = C_1e^{m_1t} + C_2e^{m_2t} + \frac{A_0}{a_0}$$

Ejemplo 17.13

$$f(t) = \text{un polinomio de orden } N = \sum_{k=0}^{N} A_k t^k$$

Cada término en x_p será una potencia de t con derivadas que también son potencias de t hasta t^N. Por lo tanto:

$$x_p = \sum_{k=0}^{N} \beta_k t^k$$

$$\frac{dx_p}{dt} = \sum_{k=0}^{N} k\beta_k t^{k-1}$$

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} = \sum_{k=0}^{N} k[k-1]\beta_k t^{k-2}$$

Entonces, sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\sum_{k=0}^{N} k[k-1]\beta_k t^{k-2} + a_1 \sum_{k=0}^{N} k\beta_k t^{k-1} + a_0 \sum_{k=0}^{N} \beta_k t^k = \sum_{k=0}^{N} A_k t^k$$

o igualando coeficientes en cada potencia de t

$$k = N: \qquad a_0\beta_N = A_N$$

$$k = N-1: \qquad a_0\beta_{N-1} + a_1 N\beta_N = A_{N-1}$$

$$k = N-2: \qquad a_0\beta_{N-2} + a_1[N-1]\beta_{N-1} + N[N-1]\beta_N = A_{N-2}$$

y para todos los demás k, $0 \leq k < N-2$

$$a_0\beta_k + a_1[k+1]\beta_{k+1} + [k+1][k+2]\beta_k = A_k$$

Así empezando desde β_N se puede resolver en forma secuencial para cada coeficiente en turno. Note que este conjunto de ecuaciones lineales para las β ya está en forma triangular.

En este punto, podría ser útil considerar un ejemplo numérico específico. Por ejemplo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = -1 + 4t + 3t^2 + 6t^3$$

$$x = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = 1 \quad \text{en} \quad t = 0$$

La ecuación característica es:

$$m^2 + 5m + 6 = 0$$

Con raíces: $m = -2, -3$. Así:

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + x_p(t)$$

Ahora

$$x_p(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$$

$$\frac{dx_p}{dt} = \beta_1 + 2\beta_2 t + 3\beta_3 t^2$$

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} = 2\beta_2 + 6\beta_3 t$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene:

$$[2\beta_2 + 6\beta_3 t] + [5\beta_1 + 10\beta_2 t + 15\beta_3 t^2]$$
$$+ [6\beta_0 + 6\beta_1 t + 6\beta_2 t^2 + 6\beta_3 t^3] = -1 + 4t + 3t^2 + 6t^3$$

Igualando coeficientes de potencias iguales de t se obtiene:

$$\begin{aligned} t^0&: \quad 6\beta_0 + 5\beta_1 + 2\beta_2 = -1 \\ t^1&: \quad 6\beta_1 + 10\beta_2 + 6\beta_3 = 4 \\ t^2&: \quad 6\beta_2 + 15\beta_3 = 3 \\ t^3&: \quad 6\beta_3 = 6 \end{aligned}$$

La solución es $\beta_3 = 1$, $\beta_2 = -2$, $\beta_1 = 3$, $\beta_0 = -2$. Por consiguiente,

$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} - 2 + 3t - 2t^2 + t^3$$

Ahora bien a $t = 0$

$$x(0) = 0 = C_1 + C_2 - 2$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = 1 = -2C_1 - 3C_2 + 3$$

o $C_1 = 4$, $C_2 = -2$. Finalmente, la solución completa al ejemplo es:

$$x(t) = 4e^{-2t} - 2e^{-3t} - 2 + 3t - 2t^2 + t^3$$

Ejemplo 17.14

$$f(t) = A_0 e^{\alpha t}$$

Todas las derivadas de $e^{\alpha t}$ son proporcionales a $e^{\alpha t}$. Por lo tanto:

$$x_p = \beta_0 e^{\alpha t}, \qquad \frac{dx_p}{dt} = \alpha\beta_0 e^{\alpha t}, \qquad \frac{d^2x_p}{dt^2} = \alpha^2\beta_0 e^{\alpha t}$$

Entonces, la ecuación es:

$$\alpha^2\beta_0 e^{\alpha t} + a_1\alpha\beta_0 e^{\alpha t} + a_0\beta_0 e^{\alpha t} = A_0 e^{\alpha t}$$

ó

$$\beta_0 = \frac{A_0}{\alpha^2 + a_1\alpha + a_0}$$

$$x(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} + \frac{A_0}{\alpha^2 + a_1\alpha + a_0} e^{\alpha t}$$

Ejemplo 17.15

$$f(t) = A_0 + A_1 \operatorname{sen} \omega t + A_2 \cos \omega t$$

Las derivadas de senos y cosenos son en sí senos y cosenos, de tal manera, que la solución específica tendrá la forma:

$$x_p = \beta_0 + \beta_1 \operatorname{sen} \omega t + \beta_2 \cos \omega t$$

$$\frac{dx_p}{dt} = \omega\beta_1 \cos \omega t - \omega\beta_2 \operatorname{sen} \omega t$$

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} = -\omega^2\beta_1 \operatorname{sen} \omega^2 t - \omega^2\beta_2 \cos \omega t$$

Sustituyendo en la ecuación se tiene:

$$[-\omega^2\beta_1 \operatorname{sen} \omega t - \omega^2\beta_2 \cos \omega t] + a_1[\omega\beta_1 \cos \omega t - \omega\beta_2 \operatorname{sen} \omega t]$$
$$+ a_0[\beta_0 + \beta_1 \operatorname{sen} \omega t + \beta_2 \cos \omega t] = A_0 + A_1 \operatorname{sen} \omega t + A_2 \cos \omega t$$

Igualando los coeficientes de t^0, sen ωt y cos ωt, se tiene:

$$\begin{aligned} t^0: &\quad a_0\beta_0 = A_0 \\ \operatorname{sen} \omega t: &\quad \beta_1[a_0 - \omega^2] - a_1\omega\beta_2 = A_1 \\ \cos \omega t: &\quad a_1\omega\beta_1 + [a_0 - \omega^2]\beta_2 = A_2 \end{aligned}$$

ó

$$\beta_0 = A_0/a_0$$

$$\beta_1 = \frac{A_1[a_0 - \omega^2] + a_1\omega A_2}{[a_0 - \omega^2]^2 + a_1{}^2\omega^2}$$

$$\beta_2 = \frac{A_2[a_0 - \omega^2] + a_1\omega A_1}{[a_0 - \omega^2]^2 + a_1{}^2\omega^2}$$

Entonces, la solución completa es:

$$x(t) = C_1e^{m_1t} + C_2e^{m_2t} + A_0/a_0 + \frac{1}{[a_0 - \omega^2]^2 + a_1{}^2\omega^2}$$
$$\times \{[A_1\langle a_0 - \omega^2\rangle + a_1\omega A_2] \operatorname{sen} \omega t + [A_2\langle a_0 - \omega^2\rangle + a_1\omega A_1] \cos \omega t\}$$

Cabe hacer notar que si a_0 y a_1 son positivas, entonces e^{m_1t} y e^{m_2t} se desplazan hasta cero, de tal manera, que para tiempos largos la respuesta del sistema es una oscilación sinusoidal alrededor del valor medio A_0/a_0, independiente de las condiciones iniciales, las cuales entran sólo a través de C_1 y C_2.

17.9 INTEGRAL CONVOLUTIVA

Para la ecuación con coeficientes constantes:

$$a_n \frac{d^nx}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = f(t)$$

se puede escribir una solución particular para una $f(t)$ arbitraria. Esta solución tiene la propiedad de que $x_p(t)$ y sus primeras $n - 1$ derivadas son todas iguales a cero cuando $t = 0$. No se derivará el resultado, que se obtiene según se indica:

1. Si $w(t) = K_1e^{m_1t} + K_2e^{m_2t} + \cdots + K_ne^{m_nt}$ es una solución homogénea. Evalúe $K_1, K_2, \ldots, K_n$ a partir de las siguientes condiciones cuando $t = 0$.

$$\begin{gathered} w = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2w}{dt^2} = \cdots = \frac{d^{n-2}w}{dt^{n-2}} = 0 \\ \frac{d^{n-1}w}{dt^{n-1}} = \frac{1}{a_n} \end{gathered} \tag{17.11}$$

2. Entonces:

$$\begin{gathered} x_p(t) = \int_0^t \{K_1e^{m_1[t-\tau]} + K_2e^{m_2[t-\tau]} + \cdots + K_ne^{m_n[t-\tau]}\}f(\tau)\,d\tau \\ x_p = \frac{dx_p}{dt} = \frac{d^2x_p}{dt^2} = \cdots = \frac{d^{n-1}x_p}{dt^{n-1}} = 0 \quad \text{en} \quad t = 0 \end{gathered} \tag{17.12}$$

El ejemplo 15.9 es un caso especial de este resultado cuando $n = 1$.

Ejemplo 17.16

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = f(t)$$

$$x = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = 1 \quad \text{en} \quad t = 0$$

Entonces:

$$w(t) = K_1e^{-2t} + K_2e^{-3t}$$

$$w(0) = K_1 + K_2 = 0$$

$$\frac{dw}{dt}(0) = -2K_1 - 3K_2 = \frac{1}{a_2} = 1$$

$$K_1 = 1, \qquad K_2 = -1$$

$$x_p = \int_0^t \{e^{-2[t-\tau]} - e^{-3[t-\tau]}\}f(\tau)\,d\tau$$

$$x(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} + \int_0^t \{e^{-2[t-\tau]} - e^{-3[t-\tau]}\}f(\tau)\,d\tau$$

$$x(0) = 0 = C_1 + C_2 + 0$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = 1 = -2C_1 - 3C_2 + 0$$

$$C_1 = 1, \qquad C_2 = -1$$

$$x(t) = e^{-2t} - e^{-3t} + \int_0^t \{e^{-2[t-\tau]} - e^{-3[t-\tau]}\} f(\tau)\, d\tau$$

Ahora, si se iguala $f(t) = -1 + 4t + 3t^2 + 6t^3$ y se efectúa la integración, se obtiene el resultado encontrado por el método de coeficientes indeterminados en el ejemplo 17.13.

La función $w(t)$ se conoce como la *función ponderante.* Una integral de la forma de la ecuación 17.12 se conoce como *convolución,* o *integral de Faltüng.*

17.10 ECUACIONES ACOPLADAS

A menudo, en diversas aplicaciones se obtienen no solamente una ecuación diferencial de enésimo orden, sino más bien n ecuaciones simultáneas de primer orden. Estas situaciones son equivalentes, como se demostrará para el sistema de segundo orden.

Suponga que se tienen dos ecuaciones para las funciones $x(t)$ e $y(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = -a_{11}x - a_{12}y + f_1(t) \tag{17.13a}$$

$$\frac{dy}{dt} = -a_{21}x - a_{22}y + f_2(t) \tag{17.13b}$$

Por conveniencia se toman como constantes a_{11}, a_{12}, a_{21}, y a_{22}. Se puede eliminar y de estas ecuaciones diferenciando primero la ecuación 17.13a para obtener:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a_{11}\frac{dx}{dt} - a_{12}\frac{dy}{dt} + \frac{df_1}{dt}$$

Sustituyendo dy/dt de la ecuación 17.13b:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_{11}\frac{dx}{dt} - a_{12}[-a_{21}x - a_{22}y + f_2(t)] + \frac{df_1}{dt}$$

y finalmente, se obtiene $a_{12}y$ de la ecuación 17.13 a:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a_{11}\frac{dx}{dt} + a_{12}a_{21}x - a_{22}\left[\frac{dx}{dt} + a_{11}x - f_1(t)\right] - a_{12}f_2(t) + \frac{df_1}{dt}$$

Reordenando se obtiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = f(t) \tag{17.14}$$

donde

$$a_1 = a_{11} + a_{22}, \qquad a_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$
$$f(t) = a_{22}f_1(t) + \frac{df_1}{dt} - a_{12}f_2(t) \tag{17.15}$$

Si se proporcionan las condiciones iniciales $x = x_0$, $y = y_0$ a $t = t_0$ se tienen entonces las condiciones equivalentes de la ecuación 17.13 a:

$$x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = -a_{11}x_0 - a_{12}y_0 + f_1(t_0) \quad \text{en} \quad t = t_0$$

Se deduce fácilmente que $y\ (t)$ satisface la ecuación de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0y = a_{11}f_2(t) + \frac{df_2}{dt} - a_{21}f_1(t)$$

$$y = y_0, \quad \frac{dy}{dt} = -a_{21}x_0 - a_{22}y_0 + f_2(t_0) \quad \text{en} \quad t = t_0$$

Esto es, las ecuaciones homogéneas (y por lo tanto, las ecuaciones características) son las mismas.

También es cierto que una ecuación de segundo orden equivale a dos ecuaciones de primer orden acopladas, un resultado que algunas veces es útil en computación numérica. Aquí el resultado no es único, siempre y cuando la ecuación 17.15 se satisfaga. Por ejemplo, la ecuación 17.14 se puede representar mediante las ecuaciones equivalentes:

$$\frac{dx}{dt} = -a_1x + y, \quad \frac{dy}{dt} = -a_0x + f(t)$$

ó

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -a_0x - a_1y + f(t)$$

17.11 ECUACIONES NO LINEALES

Se han desarrollado algunos procedimientos analíticos, de tipo general para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y lineales. Tales procedimientos no existen en general para las ecuaciones no lineales. En algunos casos muy especiales se pueden obtener soluciones para las ecuaciones no lineales. Por ejemplo, ecuaciones de la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dF(x)}{dx} = 0$$

donde $F\ (x)$ es alguna función no lineal de x, se puede resolver multiplicando la ecuación por dx/dt para obtener:

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} = 0$$

Esto es equivalente a:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + F(x)\right\} = 0$$

Entonces se integra la derivada a:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + F(x) = C_1$$

donde:

$$C_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + F(x) \quad \text{en} \quad t = 0$$

De esta forma se obtiene la ecuación separable:

$$[C_1 - F(x)]^{-1/2}\frac{dx}{dt} = 2^{1/2}$$

la cual tiene una solución:

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{2^{1/2}[C_1 - F(\xi)]^{1/2}}$$

Aun en este caso especial, es probable que la integración final requiera una solución numérica utilizando la regla del trapezoide o algún otro método. En la mayoría de los casos las ecuaciones no lineales deberán resolverse desde el principio en forma numérica.

17.12 SOLUCION NUMERICA

Al desarrollar una solución numérica de una ecuación diferencial, se calcula el valor de la función a una secuencia de valores discretos de la variable independiente. Suponga que se busca la función $x(t)$ en los puntos $t_0, t_1, t_2, \ldots,$ donde $t_{n+1} - t_n = \Delta t$ es un número fijo. Para simplificar se expresará $x(t_n)$ mediante x_n. Si $x(t)$ es la solución (usualmente no lineal) de la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t), \qquad \text{dada } x_0 \tag{17.16}$$

entonces se puede integrar formalmente entre t_n y t_{n+1} para escribir:

$$x_{n+1} = x_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(x(t), t)\, dt \tag{17.17}$$

El problema consiste en cómo evaluar la integral, ya que, por supuesto, no se conoce la función $x(t)$.

La aproximación más simple consiste en considerar que $F(x(t), t)$ es constante entre t_n y t_{n+1}. Entonces:

$$\int_{t_n}^{n+1^\circ} F(x(t), t)\, dt \simeq F(x_n, t_n)\, \Delta t$$

y

$$x_{n+1} \simeq x_n + F(x_n, t_n)\, \Delta t \tag{17.18}$$

Dado que se conoce x_0 se puede calcular a la vez $x_1, x_2, \ldots$. Este es el cálculo aproximado más sencillo y se conoce como el *método de Euler*.

Ejemplo 17.7

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) = x, \qquad x_0 = 1$$

Se considera esta ecuación lineal que tiene una solución exacta $x = e^t$, de tal manera, que se puede comparar la solución numérica con la exacta. La ecuación 17.18 se convierte en:

$$x_{n+1} = x_n + x_n t = x_n[1 + t]$$

Tomando $\Delta t = 0.10$. Entonces se obtienen los siguientes resultados.

t	0	0.1	0.2	0.3	0.4
método de Euler	1.00	1.10	1.21	1.33	1.46
solución exacta	1.00	1.11	1.22	1.35	1.49

Es evidente que existe un error en el cálculo, el cual es acumulativo a medida que t se hace más grande. Para este caso, se puede calcular exactamente el error, ya que se puede demostrar que x_n es igual a:

$$x_n = [1 + \Delta t]^n = \left[1 + \frac{t}{n}\right]^n$$

A medida que $n \to \infty$ para una t fija, esto se convierte evidentemente en, e^t, de tal manera que es claro que a medida que Δt se haga más pequeño, será mejor la aproximación. El error relativo es:

$$\text{error relativo} = \frac{|e^t - x_{n,\ \text{Euler}}|}{e^t} = \frac{|e^t - \{1 + t/n\}^n|}{e^t}$$

Por ejemplo, cuando $t = 1$, para $\Delta t = 0.2$, 0.1, y 0.05 ($n = 5$, 10, 20), se obtiene un error relativo de 0.08, 0.04, y 0.03, respectivamente.

Una mejor aproximación a la integral en la ecuación 17.17 se obtiene de la regla trapezoidal, es decir, la ecuación 15.17:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} F(x(t), t)\, dt \simeq \tfrac{1}{2}[F(x_n, t_n) + F(x_{n+1}, t_{n+1})]\, \Delta t$$

De esta forma

$$x_{n+1} \simeq x_n + \tfrac{1}{2}F(x_n, t_n)\, \Delta t + \tfrac{1}{2}F(x_n + F(x_n, t_n)\, \Delta t,\ t_{n+1})\, \Delta t \qquad (17.19)$$

Dado que no se conoce x_{n+1}, $F(x_{n+1}, t_{n+1})$ se puede calcular en forma aproximada por ejemplo, mediante la ecuación 17.18 y escribir finalmente,

$$x_{n+1} \simeq x_n + \tfrac{1}{2}F(x_n, t_n)\, \Delta t + \tfrac{1}{2}F(x_{n+1}, t_{n+1})\, \Delta t$$

La ecuación 17.19 es la más sencilla de un tipo de esquemas numéricos llamados *métodos de* Runge-Kutta. Es una ecuación de Runge-Kutta de segundo orden.

Ejemplo 17.18

$$F(x, t) = x.$$

Entonces

$$F(x_n, t_n) = x_n$$

$$F(x_n + F(x_n, t_n)\, \Delta t, t_n) = x_n + F(x_n, t_n)\, \Delta t = x_n + x_n\, \Delta t$$

Por consiguiente, la ecuación 17.19 se convierte en:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &\simeq x_n + \tfrac{1}{2}x_n\,\Delta t + \tfrac{1}{2}[x_n + x_n\,\Delta t]\,\Delta t \\
&= x_n[1 + \Delta t + \tfrac{1}{2}\Delta t^2]
\end{aligned}
$$

Para $\Delta t = 0.10$ y $x_0 = 1.00$ se obtiene $x_1 = 1.11$, $x_2 = 1.22$, $x_3 = 1.35$, $x_4 = 1.49$, y así sucesivamente, que concuerda con la solución exacta hasta tres cifras significativas.

El error puede calcularse de nuevo exactamente para este ejemplo lineal notando que:

$$
x_n = [1 + \Delta t + \tfrac{1}{2}\Delta t^2]^n = \left[1 + \frac{t}{n} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{n^2}\right]^n
$$

Por consiguiente, a $t = 1$ el error relativo es menor que 0.01 para $n = 5$ ($\Delta t = 0.20$), lo cual significa una mejoría considerable con respecto al método simple de Euler con sólo un ligero esfuerzo extra en el cálculo. La figura 17.1 es un programa en Fortran IV para el método de Runge-Kutta de segundo orden utilizando los datos del ejemplo 17.18.

El método de Ruge-Kutta más comúnmente utilizado para computación digital es el de cuarto orden.

```
C       METODO DE RUNGE - KUTTA DE SEGUNDO ORDEN
C       ESTE PROGRAMA ESTA ESCRITO EN LENGUAJE FORTRAN IV Y SE HA CORRIDO
C       EN UNA CALCULADORA XDS 9300.
C       LEER LOS VALORES INICIALES DE T Y X, EL INTERVALO ENTRE VALORES SUCE-
C       SIVOS, DE T, Y EL VALOR MAXIMO DE T.
        LEER ( 105,999 ) T, X, DELTAT, TMAX
    999 FORMATO ( 4F10.0 )
C       ESCRIBIR ENCABEZADOS
        ESCRIBIR ( 108, 998 )
    998 FORMATO ( 20H            T              X // )
        ESCRIBIR ( 108, 997 ) T, X
    997 FORMATO ( E10.4, E15.4 )
     20 NUEVX =X+ 0.5 * F ( X, T ) * DELTAT  0.5 * F ( X+F ( X, T * DELTAT, T+
        DELTAT) * DELTAT
        T= T+ DELTAT
        ESCRIBIR ( 108, 997 ( T, NUEVX
        SI ( T. LLEGA TMAX ) IR A 10
        X   NUEVX
        IR A 20
     10 SALIR LLAMAR A LA SALIDA
        TERMINAR
        FUNCION F ( X, T )
C       INSERTAR FUNCION DE INTERES EN LA SIGUIENTE TARJETA.
        F =X
        REGRESAR
        TERMINAR
C       DATOS PARA EL PROBLEMA DE PRUEBA
          0.0          1.0          0.1          1.0
```

FIGURA 17.1 Programa en Fortran IV para la solución numérica de una ecuación diferencial, utilizando el método de Runge-Kutta de segundo orden.