

CAPITULO 13

Comportamiento de procesos transitorios

13.1 INTRODUCCION

Por lo general, se ha considerado que los modelos para los procesos que se desarrollan en este texto dependen del tiempo. Es muy importante comprender la forma en que dichos procesos dependen del tiempo, para efectuar el diseño y el análisis de los experimentos y para saber cómo operará un proceso en relación a las especificaciones de diseño para el estado estable. Generalmente, se ha hecho énfasis en lo primero, como por ejemplo, en los capítulos 5 y 8. Aquí se hace un estudio de un reactor tipo tanque con agitación, en la operación real de un proceso que ha sido diseñado para proporcionar un comportamiento específico. Particularmente, se considera el efecto de las variaciones en la alimentación sobre la conversión del reactor y también el diseño de un sistema de control simple para mantener una producción constante, aun cuando fluctúen las condiciones de alimentación. Al realizar lo anterior, se hace hincapié en los aspectos de predicción y diseño del proceso del análisis, y se dan algunas técnicas con el fin de determinar el comportamiento del modelo para sistemas de segundo orden.

13.2 ECUACIONES DEL REACTOR

Las ecuaciones que describen la reacción de pseudoprimer orden $A \rightarrow D$ en un reactor tipo tanque con agitación y con camisa, se dedujeron en la sección 12.9 como

$$\theta \frac{dc_A}{dt} = c_{Af} - c_A - k_0 \theta e^{-E/RT} c_A \quad (13.1)$$

$$\theta \frac{dT}{dt} = T_f - T + Jk_0 \theta e^{-E/RT} c_A - u[1 + K][T - T_c] \quad (13.2)$$

450 Sistemas no isotérmicos

$$\theta_c \frac{dT_c}{dt} = T_{cf} - T_c + K[T - T_c] \quad (13.3)$$

Aquí se ha despreciado el trabajo a la flecha, y se ha definido $\theta = V/q$, $J = -\Delta H_R/\rho_c \underline{c}_p$, $K = ha/\rho_c q_c \underline{c}_{pc}$, $u = \rho_c q_c \underline{c}_{pc} K/[1 + K]\rho q \underline{c}_p$, en donde el subíndice c se refiere a la camisa. Es conveniente efectuar una simplificación para disminuir al mínimo las manipulaciones, sin afectar seriamente la estructura básica del problema. Se supone que el tiempo de residencia θ_c de la camisa, es pequeño en comparación al del reactor (volumen pequeño o alta velocidad de flujo), y formalmente se establece que $\theta_c \rightarrow 0$. (En el problema 13.1, se bosqueja una justificación rigurosa de este aspecto.) En este caso, la ecuación 13.3 se simplifica, dando como resultado la siguiente ecuación algebraica

$$0 = T_{cf} - T_c + K[T - T_c] \quad (13.4)$$

Con ella se puede calcular T_c substituir en la ecuación 13.2. La ecuación resultante para la temperatura del reactor es:

$$\theta \frac{dT}{dt} = T_f - T + Jk_0 \theta e^{-E/RT} c_A - u[T - T_{cf}] \quad (13.5)$$

Las ecuaciones 13.1 y 13.5 unidas a las condiciones en que el tiempo $t = 0$, determinan el comportamiento transitorio. Ya se ha estudiado la solución de estas ecuaciones en la operación bajo condiciones constantes.

La diferencia entre las ecuaciones lineales y no lineales se estudia en las secciones 17.1 y 17.2. Las ecuaciones 13.1 y 13.5 incluyen el exponencial $e^{-E/RT}$, así como el producto $c_A e^{-E/RT}$, y, por lo tanto, son no lineales. Debido a lo anterior, es muy poco probable que puedan obtenerse las soluciones en términos de funciones simples. Se puede emplear la integración numérica del tipo utilizado en la sección 12.11 para obtener respuestas específicas para un conjunto dado de parámetros, pero usualmente se requerirán expresiones analíticas y de validez general para construcciones más amplias. Al final de la Sec. 2.4 se pueden encontrar los indicios para efectuar las aproximaciones necesarias que conducirán a un conjunto de ecuaciones significativas que tengan soluciones analíticas simples. Ahí se observó que las pequeñas desviaciones de un valor designado se podrían aproximar bastante, mediante una función lineal. Este concepto tiene aplicaciones muy útiles.

Es necesario hacer una concesión física, con objeto de obtener un problema matemático de fácil manipulación y, ésta consiste en considerar solamente las temperaturas y concentraciones que estén cercanas a las condiciones constantes de diseño. Posteriormente, se tratará el enunciado

matemático preciso de esta suposición y su necesidad. En el estado estable las ecuaciones 13.1 y 13.5 se convierten en:

$$0 = c_{Afs} - c_{As} - k_0 \theta e^{-E/RT_s} c_{As} \quad (13.6)$$

$$0 = T_{fs} - T_s + Jk_0 \theta e^{-E/RT_s} c_{As} - u_s [T_s - T_{cfs}] \quad (13.7)$$

Para comprender el fenómeno físico, simplificando cuanto sea posible el tratamiento matemático, es conveniente considerar que las condiciones constantes de operación son el punto de referencia, y medir las cantidades en términos de su diferencia a partir de dicho valor. De esta forma, haciendo que $x(t)$ sea la diferencia entre la concentración de A en cualquier tiempo y el valor bajo condiciones constantes:

$$x(t) = c_A(t) - c_{As} \quad (13.8a)$$

en forma similar, si $y(t)$ es la diferencia de temperatura:

$$y(t) = T(t) - T_s \quad (13.8b)$$

Es preciso considerar el caso en que puedan variar la concentración de la alimentación y la temperatura, de tal manera, que las fluctuaciones se definan como $x_f(t)$ y $y_f(t)$, respectivamente,

$$x_f(t) = c_{Af}(t) - c_{Afs} \quad (13.8c)$$

$$y_f(t) = T_f(t) - T_{fs} \quad (13.8d)$$

Para no complicar el desarrollo, se supondrá que las velocidades de flujo q y q_c permanecen constantes, y también la temperatura de alimentación del refrigerante, T_{cf} . En otra sección se utilizarán estas suposiciones.

Las ecuaciones 13.1 y 13.5 pueden escribirse en términos de las variables de fluctuación x y y como:

$$\begin{aligned} \theta \frac{d[c_{As} + x]}{dt} &= \theta \frac{dx}{dt} \\ &= c_{Afs} + x_f - c_{As} - x - k_0 \theta e^{-E/R[T_s + y]} [c_{As} + x] \end{aligned} \quad (13.9)$$

$$\begin{aligned} \theta \frac{d[T_s + y]}{dt} &= \theta \frac{dy}{dt} \\ &= T_{fs} + y_f - T_s - y + Jk_0 \theta e^{-E/R[T_s + y]} [c_{As} + x] \\ &\quad - u[T_s + y - T_{cf}] \end{aligned} \quad (13.10)$$

452 Sistemas no isotérmicos

Se sabe que c_{As} y T_s son constantes, de tal manera, que $dc_{As}/dt = dT_s/dt = 0$. Estas ecuaciones comprenden un número de términos de la operación bajo condiciones constantes, y pueden ordenarse de nuevo y simplificarse al substituir las ecuaciones 13.6 y 13.7 para el estado estable. Esto da:

$$\theta \frac{dx}{dt} = x_f - x - k_0 \theta e^{-E/R[T_s+y]} x - k_0 \theta c_{As} \{e^{-E/R[T_s+y]} - e^{-E/RT_s}\} \quad (13.11)$$

$$\theta \frac{dy}{dt} = y_f - y + Jk_0 \theta e^{-E/R[T_s+y]} x + Jk_0 \theta c_{As} \{e^{-E/R[T_s+y]} - e^{-E/RT_s}\} - uy \quad (13.12)$$

En este aspecto se utilizará la idea de estar muy cercanos a la operación bajo condiciones constantes y que, por lo tanto, x y y son de pequeña magnitud. El exponencial puede expresarse en términos de una serie de Taylor (ecuación 15.20), alrededor de $y = 0$ como:

$$e^{-E/R[T_s+y]} = e^{-E/RT_s} + \frac{E}{RT_s^2} e^{-E/RT_s} y + \frac{1}{2} \frac{E}{RT_s^4} \left[\frac{E}{R} - 2T_s \right] e^{-E/RT_s} y^2 + \dots$$

Entonces la ecuación 13.11 es

$$\begin{aligned} \theta \frac{dx}{dt} = & x_f - x - k_0 \theta e^{-E/RT_s} x - \frac{k_0 \theta E}{RT_s^2} e^{-E/RT_s} xy \\ & - \frac{k_0 \theta E}{RT_s^4} \left[\frac{E}{2R} - T_s \right] e^{-E/RT_s} xy^2 + \dots \\ & - \frac{k_0 \theta c_{As} E e^{-E/RT_s}}{RT_s^2} y \\ & - \frac{k_0 \theta c_{As} E}{RT_s^4} \left[\frac{E}{2R} - T_s \right] e^{-E/RT_s} y^2 + \dots \end{aligned} \quad (13.13)$$

Por supuesto, la ecuación 13.13 es equivalente completamente a la ecuación original de balance de masa, 13.1, que, sin embargo, está en una forma más

apropiada para efectuar un cálculo aproximado. Se supone que x y y son suficientemente pequeñas en magnitud, de tal manera que y^2 , xy , etc; son despreciables en comparación con x y y . Se pueden obtener resultados muy útiles mediante esta aproximación, pero ¡hay que notar que implica una gran restricción física! No obstante, ahora la ecuación 13.13 se convierte en:

$$\theta \frac{dx}{dt} = x_f - x - k_0 \theta e^{-E/RT_s} x - \frac{k_0 \theta c_{As} E e^{-E/RT_s}}{RT_s^2} y \quad (13.14a)$$

De manera semejante, la ecuación de temperatura 13.12 se convierte en:

$$\theta \frac{dy}{dt} = y_f - y + Jk_0 \theta e^{-E/RT_s} x + \frac{Jk_0 \theta c_{As} E e^{-E/RT_s}}{RT_s^2} y - uy \quad (13.15a)$$

o reagrupando:

$$\theta \frac{dx}{dt} = -[1 + k_0 \theta e^{-E/RT_s}]x - \left[\frac{k_0 \theta c_{As} E e^{-E/RT_s}}{RT_s^2} \right] y + x_f \quad (13.14b)$$

$$\theta \frac{dy}{dt} = +[Jk_0 \theta e^{-E/RT_s}]x - \left[1 + u - \frac{Jk_0 \theta c_{As} E e^{-E/RT_s}}{RT_s^2} \right] y + y_f \quad (13.15b)$$

Estas ecuaciones son ahora lineales, y los coeficientes de x y y son constantes conocidas, cuyos valores dependen del estado constante muy cerca del cual van a efectuarse los cálculos. Limitándose a las concentraciones y temperaturas cercanas al estado estable, se han obtenido las ecuaciones que pueden tratarse analíticamente mediante los métodos bosquejados en el capítulo 17.

Para su aplicación, es conveniente convertir las dos ecuaciones lineales diferenciales de primer orden a una ecuación única de segundo orden, ya sea para la concentración o la temperatura. Las ecuaciones 13.14 y 13.15 son de la forma de las ecuaciones 17.13. En la sección 17.10 se demuestra que estas ecuaciones se pueden reemplazar con cualquiera de las siguientes ecuaciones equivalentes de segundo orden:

454 Sistemas no isotérmicos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = f_1(t) \quad (13.16)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0y = f_2(t) \quad (13.17)$$

$$a_1 = \frac{1}{\theta} \left\{ 2 + u + k_0 \theta e^{-E/RT_s} \left[1 - \frac{Jc_{As}E}{RT_s^2} \right] \right\} \quad (13.18a)$$

$$a_0 = \frac{1}{\theta^2} \left\{ 1 + u + k_0 \theta e^{-E/RT_s} \left[1 + u - \frac{Jc_{As}E}{RT_s^2} \right] \right\} \quad (13.18b)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{\theta^2} \left[1 + u - \frac{Jk_0 \theta c_{As} E e^{-E/RT_s}}{RT_s^2} \right] x_f + \frac{1}{\theta} \frac{dx_f}{dt} - \frac{k_0 c_{As} E e^{-E/RT_s}}{\theta RT_s^2} y_f \quad (13.19a)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{\theta^2} [1 + k_0 \theta e^{-E/RT_s}] y_f + \frac{1}{\theta} \frac{dy_f}{dt} + \frac{1}{\theta} Jk_0 e^{-E/RT_s} x_f \quad (13.19b)$$

Para los parámetros del reactor utilizados en los ejemplos 16.1 y 16.4, los valores de a_1 , a_0 , $f_1(t)$ y $f_2(t)$ de cada uno de los tres estados estables son como sigue:

$$c_{As} = 0.499, \quad T_s = 311.4: \quad a_1 = 6.57 \quad a_0 = 10.80$$

$$f_1(t) = 10.78x_f + 3.33 \frac{dx_f}{dt} - 9.92 \times 10^{-4} y_f$$

$$f_2(t) = 11.13y_f + 3.33 \frac{dy_f}{dt} + 7.01x_f$$

$$c_{As} = 0.257, \quad T_s = 393.4: \quad a_1 = -6.71 \quad a_0 = -33.46$$

$$f_1(t) = -44.00x_f + 3.33 \frac{dx_f}{dt} - 0.163y_f$$

$$f_2(t) = 21.65y_f + 3.33 \frac{dy_f}{dt} + 3.56 \times 10^3 x_f$$

$$c_{As} = 0.008, \quad T_s = 477.5: \quad a_1 = 188.3 \quad a_0 = 616.6$$

$$f_1(t) = -64.11x_f + 3.33 \frac{dx_f}{dt} - 0.222y_f$$

$$f_2(t) = 691.8y_f + 3.33 \frac{dy_f}{dt} + 2.30 \times 10^5 x_f$$

13.3 OBTENCION DEL ESTADO ESTABLE

En la sección 12.10 se comenzó a investigar la cuestión de si sería posible alcanzar las condiciones de operación en estado estable calculado previamente. Se desarrolló un criterio gráfico para la imposibilidad de alcanzarlas, y ahora se está en posición de tratar totalmente con el problema. Se supone que las perturbaciones en la alimentación han desplazado la concentración y la temperatura en una cantidad x_0 y y_0 , respectivamente, a partir de las condiciones de diseño para estado estable. Para $t > 0$ se puede suponer, para simplificar, que no hay perturbaciones posteriores ($x_f = y_f = 0$). Entonces la ecuación 13.16 que describe la respuesta del reactor se convierte en:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = 0 \quad (13.20)$$

Si al pasar el tiempo $x(t)$ disminuye hasta cero con el tiempo, el diseño bajo condiciones constantes es estable y puede mantenerse. Si $x(t)$ no regresa a cero con el tiempo, no puede realizarse la operación en condiciones constantes.

La ecuación 13.20 es una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes. El procedimiento de resolución se bosqueja en la sección 17.3. Se supone una solución de la forma:

$$x = Ce^{mt}$$

Substituyendo en la ecuación 13.20, se tiene:

$$Ce^{mt}[m^2 + a_1m + a_0] = 0$$

y, dado que el exponencial no desaparece, se obtiene la ecuación característica:

$$m^2 + a_1m + a_0 = 0 \quad (13.21)$$

Esta tiene las raíces m_1 y m_2 dadas por:

$$m_1 = -\frac{a_1}{2} + \left[\frac{a_1^2}{4} - a_0 \right]^{1/2} \quad (13.22a)$$

$$m_2 = -\frac{a_1}{2} - \left[\frac{a_1^2}{4} - a_0 \right]^{1/2} \quad (13.22b)$$

456 Sistemas no isotérmicos

Note que:

$$m_1 + m_2 = -a_1 \quad (13.23)$$

$$m_1 m_2 = +a_0 \quad (13.24)$$

La solución general es:

$$x(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} \quad (13.25)$$

El comportamiento de la concentración y la temperatura después del tiempo cero es regido completamente por el carácter de m_1 y m_2 . Inicialmente, es conveniente distinguir entre los casos cuando m_1 y m_2 son reales, y cuando éstos son complejos, dependiendo del signo del discriminante, $a_1^2 - 4a_0$.

Caso I: $a_1^2 - 4a_0 > 0$, m_1 y m_2 son reales.

En este caso, existen tres posibilidades: dos raíces positivas, dos raíces negativas, una raíz positiva y una negativa. El término e^{mt} tenderá a cero si m es negativo, y crecerá sin límite si m es positivo. De esta forma, tanto m_1 como m_2 son negativos, $x(t)$ irá hasta cero, como se muestra en la figura 13.1. Si m_1 o m_2 son positivos, la solución crecerá hasta $\pm\infty$, según se indica en la figura. La operación en condiciones constantes es estable y puede mantenerse a pesar de las pequeñas perturbaciones, *si y sólo si* m_1 y m_2 son negativos. Es obvio que, cuando una o ambas raíces son positivas, la conversión en realidad no irá hasta infinito. Después de un corto periodo de tiempo, la suposición de que x^2 es pequeño en comparación con x , no será válida, y la ecuación 13.20 no podrá describir la situación física.

Las ecuaciones 13.23 y 13.24 proporcionan un criterio sencillo para determinar cuándo son negativas ambas raíces. La suma de dos números negativos es negativa, de tal manera, que a partir de la ecuación 13.23, $-a_1$ deberá ser negativo, o $a_1 > 0$. El producto de dos números negativos es positivo, de tal manera, que a partir de la ecuación 13.24 se tiene $a_0 > 0$. A partir de la ecuación 13.18 éstos pueden expresarse en términos de los parámetros del reactor como:

$$\theta a_1 = 2 + u + k_0 \theta e^{-E/RT_s} \left[1 - \frac{Jc_{As}E}{RT_s^2} \right] > 0 \quad (13.26a)$$

$$\theta^2 a_0 = 1 + u + k_0 \theta e^{-E/RT_s} \left[1 + u - \frac{Jc_{As}E}{RT_s^2} \right] > 0 \quad (13.26b)$$

Note que para el reactor adiabático, $u = 0$, la segunda condición lleva implícita la primera, dado que $\theta a_1 = \theta^2 a_0 + 1$. En general, esto no se aplica.

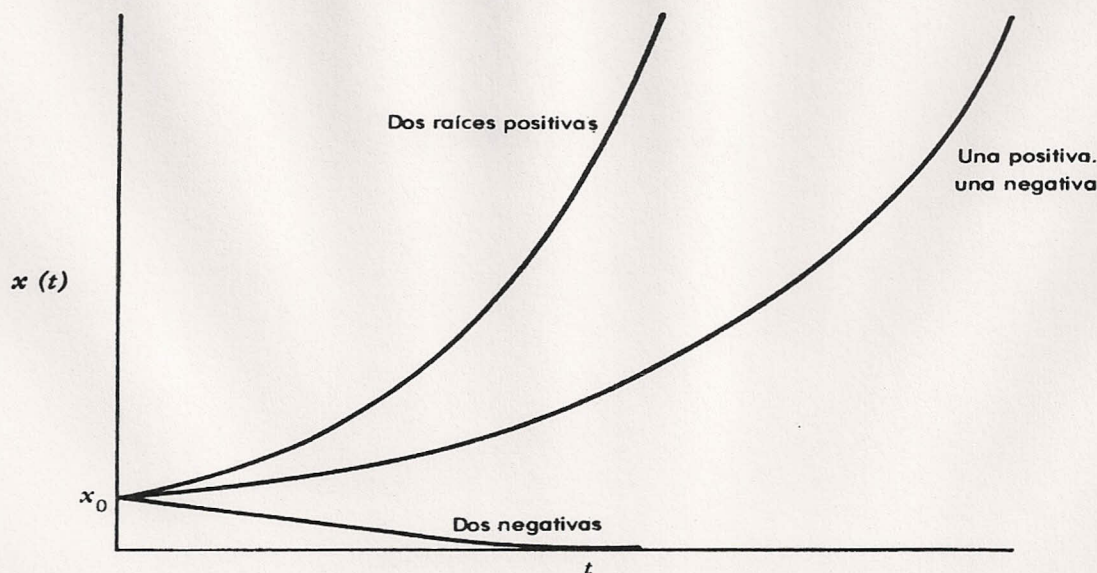


FIGURA 13.1 Respuesta transitoria de un sistema lineal homogéneo de segundo orden con raíces características reales $a_1^2 - 4a_0 > 0$. $x(t)$ tiende a cero, si y sólo si ambas raíces son negativas.

Caso II: $a_1^2 - 4a_0 < 0$, m_1 y m_2 son complejos.

Este caso puede ocurrir solamente, si $a_0 > 0$. m_1 y m_2 son ahora

$$m_1 = -\frac{a_1}{2} + i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} \quad m_2 = -\frac{a_1}{2} - i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}$$

donde $i^2 = -1$. Entonces, la ecuación 13.25 se convierte en:

$$x(t) = C_1 e^{-a_1 t/2} e^{i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} t} + C_2 e^{-a_1 t/2} e^{-i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} t}$$

Seguendo la sección 17.4 se puede utilizar la igualdad:

$$e^{i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} t} = \cos\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} t + i\sin\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} t$$

y escribir otra vez $x(t)$ en la forma:

$$x(t) = e^{-a_1 t/2} \left[K_1 \cos\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} t + K_2 \sin\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} t \right] \quad (13.27)$$

Aquí $K_1 = C_1 + C_2$, $K_2 = i[C_1 - C_2]$. Entonces, si $a_1 > 0$, la respuesta es amortiguada, según se demuestra en la figura 13.2(a). Si $a_1 < 0$ la fluctuación de la concentración crece a partir de cero en forma oscilatoria, según se muestra en la figura 13.2(b).

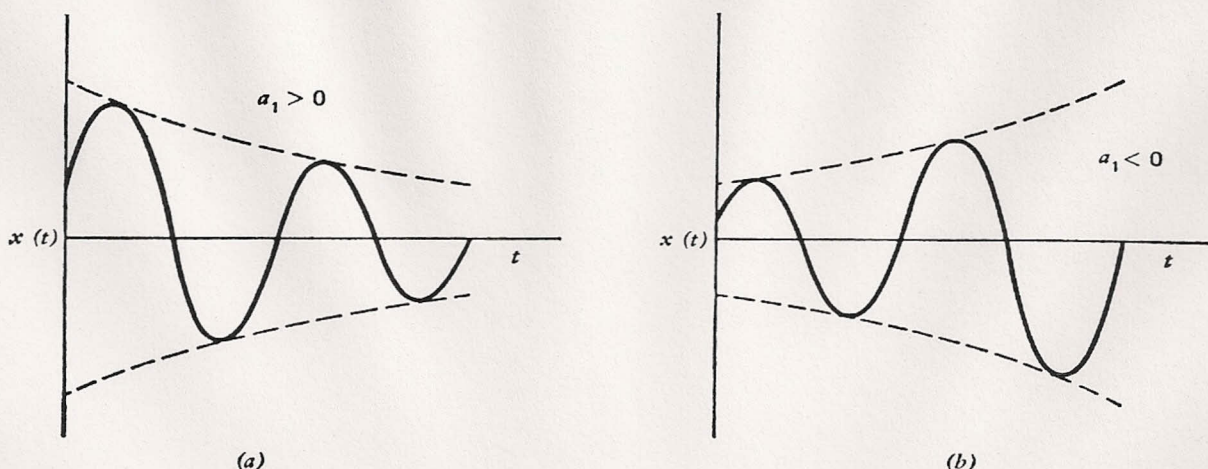


FIGURA 13.2 Respuesta transitoria de un sistema lineal homogéneo de segundo orden con raíces características complejas, $a_1 - 4a_0^2 < 0$. $x(t)$ tiende a cero en forma oscilatoria, si y sólo si, ambas raíces tienen partes negativas reales [(a) $a_1 > 0$], y aumenta en forma oscilatoria si existe una parte positiva real [(b), $a_1 < 0$].

De esta forma, el diseño en estado estable se alcanza, si y sólo si, $a_1 > 0$. Dado que el comportamiento oscilatorio (raíces complejas) requiere que $a_0 > 0$, conduce a las mismas condiciones que el caso I, $a_1 > 0$, $a_0 > 0$, que se expresa en términos de los parámetros del reactor en las ecuaciones 13.26.

13.4 CONDICION DE LA PENDIENTE

En la sección 12.10 se utilizaron argumentos especiales para concluir que el estado estable no se puede alcanzar en la práctica, siempre que la pendiente de la línea I de la figura 12.7 sea más negativa que la de la línea II. Esta condición de pendiente puede relacionarse con el criterio seguido en la sección anterior, según se indica:

La línea I es una gráfica de c_{AI} respecto a T definida por la ecuación 12.55

$$c_{AI} = \frac{c_{Af}}{1 + k_0 \theta e^{-E/RT}} \quad (12.55)$$

Se ha utilizado el subíndice I para expresar "a partir de la línea I". La pendiente se forma a partir de la diferenciación con respecto a T

$$\frac{dc_{AI}}{dT} = - \frac{k_0 \theta e^{-E/RT} c_{Af} E}{RT^2 [1 + k_0 \theta e^{-E/RT}]^2}$$

En estado estable $c_{AI} = c_{As}$, $T \rightarrow T_s$, y la ecuación 12.55 puede substituirse para obtener la pendiente en la intersección de las líneas I y II:

$$\text{Estado estable: } \frac{dc_{AI}}{dT} = - \frac{k_0 \theta E}{RT_s^2} \frac{c_{As} e^{-E/RT_s}}{1 + k_0 \theta e^{-E/RT_s}} \quad (13.28)$$

La línea II es una línea recta definida por la ecuación 12.54,

$$c_{AII} = c_{Af} + \frac{1}{J} [T_f + u T_{cf}] - \frac{1+u}{J} T \quad (12.54)$$

Entonces la pendiente es:

$$\frac{dc_{AII}}{dT} = - \frac{1+u}{J} \quad (13.29)$$

Al comparar las ecuaciones 13.28 y 13.29 con la ecuación 13.26b, se demuestra que la condición $a_0 > 0$ es idéntica a la condición de que $dc_{AI}/dT > dc_{AII}/dT$ en estado estable. De esta forma, las condiciones constantes medias deben tener $a_0 < 0$ y, nunca pueden alcanzarse en la práctica. Las condiciones de operación constante a alta y baja temperatura siempre tienen $a_0 > 0$. A menos, que el reactor sea adiabático ($u = 0$) siempre es necesario comprobar que $a_1 > 0$ para asegurar que la operación bajo condiciones constantes es estable. Es posible construir un reactor con condiciones $a_0 > 0$, $a_1 < 0$. Un ejemplo de esto, es la reacción entre cloruro de acetilo y agua para formar ácido acético y ácido clorhídrico en un reactor de flujo continuo tomado de una publicación de Baccaro, Gaitonde, y Douglas en el *AIChE Journal*, **16**, 249 (1970.).

13.5 CONDICION DE LA RESPUESTA

Las ecuaciones lineales simples del modelo que describen el comportamiento del reactor cuando las concentraciones y las temperaturas son cercanas al estado estable, permiten calcular rápidamente los efectos de los cambios en las condiciones de operación. Suponga, por ejemplo, que el proceso está operando en estado estable cuando la temperatura de alimentación cambia en una cantidad constante y_f . Entonces puede calcularse el cambio en la concentración del efluente.

A partir de las ecuaciones 13.16 y 13.19, el cambio en la concentración $x(t) = c_A - c_{As}$ se describe mediante la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = - \frac{k_0 c_{As} E e^{-E/RT_s}}{\theta R T_s^2} y_f = \text{constante} \quad (13.30)$$

Se ha fijado $x_f = 0$ en la función $f_1(t)$. La solución a esta ecuación no homogénea se obtiene, utilizando los métodos bosquejados en la sección

460 Sistemas no isotérmicos

17.7. La solución general es una suma de una solución homogénea y una particular

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

En la sección 13.3 se estudió la solución homogénea y es ésta:

$$x_h(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}$$

donde m_1 y m_2 están dadas por la ecuación 13.22. La solución particular puede encontrarse del método de coeficientes no determinados en el ejemplo 17.12 y es

$$x_p = \frac{k_0 c_{As} E e^{-E/RT_s} y_f}{a_0 \theta R T_s^2}$$

De esta forma, la solución general es la siguiente:

$$x(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} - \frac{k_0 c_{As} E e^{-E/RT_s} y_f}{a_0 \theta R T_s^2} \quad (13.31)$$

Las constantes C_1 y C_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales. Cuando $t = 0$ el reactor está operando en estado estable, de tal manera que $x(0) = y(0) = 0$. A partir de la ecuación 13.14 es evidente que $dx/dt = 0$ a $t = 0$ cuando $x(0)$, $y(0)$, y x_f igual a cero. De esta forma:

$$x(0) = C_1 + C_2 - \frac{k_0 c_{As} E e^{-E/RT_s} y_f}{a_0 \theta R T_s^2} = 0$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = m_1 C_1 + m_2 C_2 = 0$$

Después de calcular C_1 y C_2 se obtiene:

$$c_A(t) - c_{As} = x(t) = - \frac{k_0 c_{As} E e^{-E/RT_s} y_f}{a_0 \theta R T_s^2} \times \left[1 + \frac{m_2}{m_1 - m_2} e^{m_1 t} - \frac{m_1}{m_1 - m_2} e^{m_2 t} \right] \quad (13.32)$$

El cambio de concentración con respecto al tiempo, para m_1 y m_2 reales se muestra en la figura 13.3(a), o en la figura 13.3(b) cuando m_1 y m_2 son complejos.

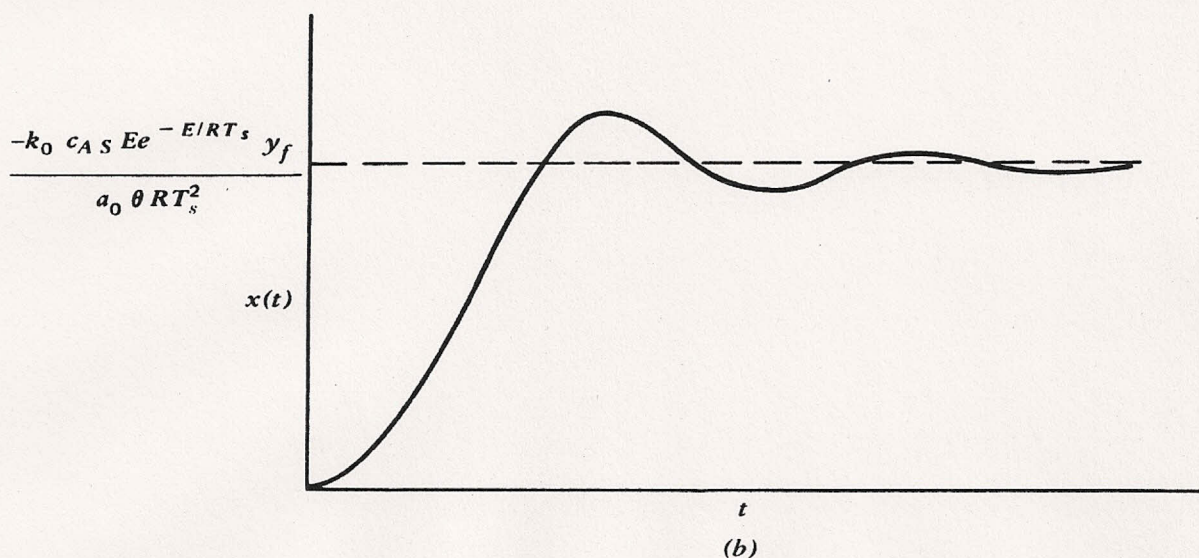
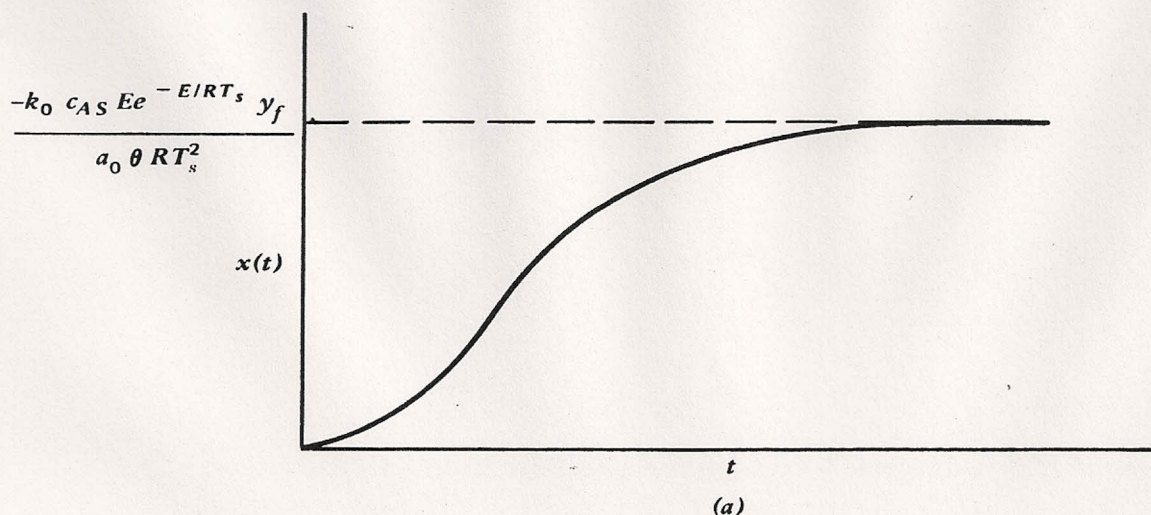


FIGURA 13.3 Cambio en la concentración de un RTT AFC calculada a partir de las ecuaciones linealizadas para un cambio constante en la temperatura de alimentación. (a) Raíces características reales. (b) Raíces características complejas.

13.6 ANALOGIAS

En numerosas ocasiones se ha indicado que se pueden describir diferentes fenómenos físicos mediante la misma ecuación matemática, siempre y cuando, se asigne el significado adecuado a los coeficientes de dicha ecuación. Por ejemplo, los modelos de transferencia de masa y transferencia de calor entre fases tienen la misma forma matemática. A menudo, es posible aprovechar dichas semejanzas en una estructura matemática,

462 Sistemas no isotérmicos

utilizando el conocimiento de un fenómeno físico para inferir el comportamiento de otro, y estas analogías juegan un papel muy importante en el diseño de ingeniería.

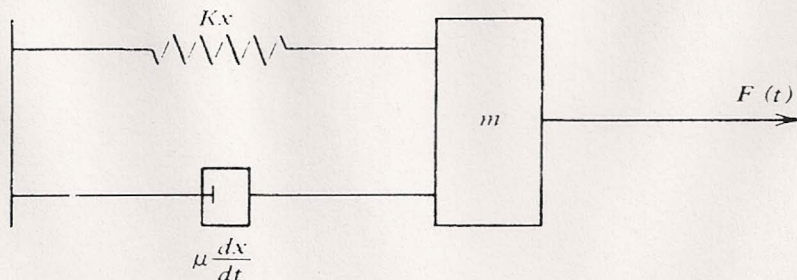


FIGURA 13.4 Sistema masa-resorte-cámara de aire. Fuerza del resorte = $-Kx$, fuerza viscosa de vaciamiento = $-\mu dx/dt$.

Para esto, no es necesario restringir el estudio solamente a fenómenos que ocurren en situaciones de ingeniería química. Por ejemplo, considere el sistema mecánico que se muestra en la figura 13.4. A partir de los principios estudiados en los cursos básicos de física, es evidente que el desplazamiento de la masa desde el equilibrio, x , se determina mediante la ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{K}{m} x = \frac{1}{m} F(t) \quad (13.33)$$

K es la constante del resorte, μ es el coeficiente de viscosidad de amortiguación, m la masa, y $F(t)$ la fuerza externa aplicada a la masa. La ecuación 13.33 es idéntica en forma a la ecuación 13.16 para la concentración del reactor. K/m corresponde a a_0 . Note que la constante del resorte debe ser positiva para que el sistema pueda regresar al equilibrio. La suma de energía potencial y energía cinética de la masa se puede expresar como:

$$E = \frac{m}{2} \left[\frac{dx}{dt} \right]^2 + \frac{1}{2} K x^2$$

Entonces

$$\frac{1}{m} \frac{dE}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m} \frac{dx}{dt} x = -\frac{\mu}{m} \left[\frac{dx}{dt} \right]^2$$

La energía de la masa debe disminuir hasta cero a medida que se aproxima al equilibrio, de tal manera, que la condición de estabilidad requiere que $dE/dt < 0$, ó $\mu/m > 0$. De esta forma, para el sistema mecánico se tiene $a_1 > 0$. Por supuesto, la conservación de la energía requiere que el amortiguador mecánico se caliente por el trabajo friccional.

La ecuación para la caída del voltaje x a través del capacitor para el

circuito resistencia-inductancia-capacitancia, que se muestra en la figura 13.5 es la siguiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC} x = \frac{1}{RC} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \quad (13.34)$$

R es la resistencia, L la inductancia, C la capacitancia, y \mathcal{E} la fuente del voltaje. También esto es idéntico a la ecuación del reactor. Las analogías

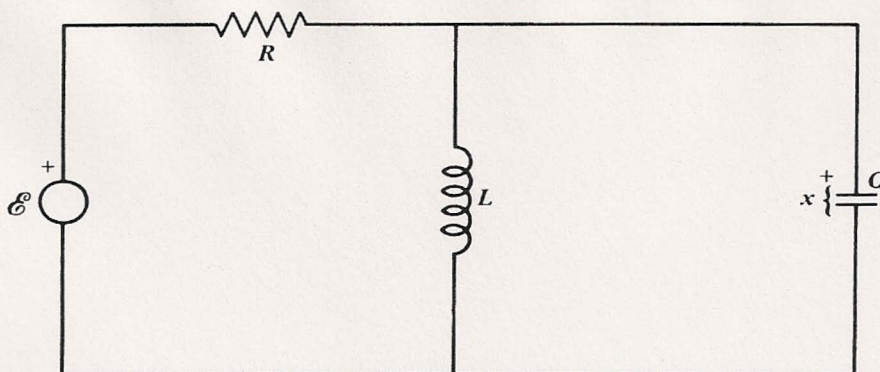


FIGURA 13.5 Circuito R - L - C

son particularmente convenientes, puesto que construyendo un circuito eléctrico con una ecuación correspondiente a otra situación física, es posible seguir la variación del voltaje del circuito con el tiempo y determinar el comportamiento del proceso en cuestión. Este es el principio básico por el cual operan las *computadoras analógicas*. Es necesario relacionar los parámetros de circuito eléctrico con los parámetros análogos del proceso real. También, se conocen computadoras analógicas mecánicas y de fluido, aunque se emplean con menor frecuencia.

13.7 DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL

En la sección 13.5 se calculó el cambio en la concentración del efluente cuando ocurre un cambio en la temperatura de alimentación. En la mayoría de los procesos, es deseable mantener la corriente de salida tan constante como sea posible a pesar de las fluctuaciones en las entradas. Para esto, es necesario diseñar sistemas de control que cambian ciertas condiciones de operación para mantener la salida deseada. En la sección 4.3 se examinó el problema de diseñar un controlador de nivel para un tanque. Aquí se considerará el diseño del sistema de control para un reactor de tanque agitado.

Las ecuaciones básicas del reactor son 13.1 y 13.5, y se repiten aquí:

464 Sistemas no isotérmicos

$$\theta \frac{dc_A}{dt} = c_{Af} - c_A - k_0 \theta e^{-E/RT} c_A \quad (13.1)$$

$$\theta \frac{dT}{dt} = T_f - T + Jk_0 \theta e^{-E/RT} c_A - u[T - T_{cf}] \quad (13.5)$$

Se supone que la concentración o la temperatura de la corriente de alimentación puede variar, pero se continuará suponiendo para simplificar, que T_{cf} es constante. El primer problema consiste en saber qué variable debe medirse. Es obvio, que se desea mantener c_A constante, pero es difícil medir las concentraciones rápidamente y con exactitud. Por consiguiente, en la mayoría de los casos habrá que medir la temperatura del reactor, y de ella deducir las desviaciones en la concentración.

A continuación, se necesita establecer la cantidad que va a manipularse. En este caso, probablemente se variará la velocidad de flujo de enfriamiento q_c o, en forma equivalente, u . Cuando la concentración c_A sea demasiado baja, se aumentará u , lo que aumenta la velocidad de enfriamiento y por consiguiente, disminuye la temperatura del reactor y la velocidad de reacción. Esto tenderá a compensar el efecto aumentando nuevamente c_A . En forma similar, si c_A se hace muy alta, se disminuirá u . En la figura 13.6 se muestra esquemáticamente el sistema de control.

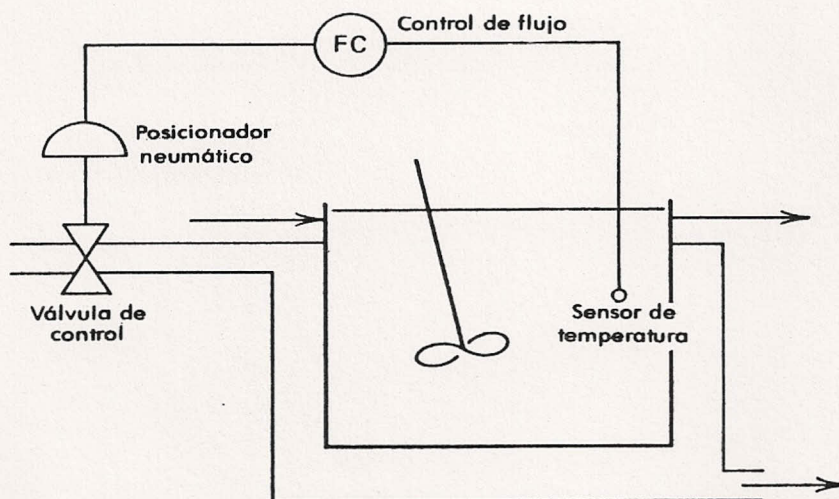


FIGURA 13.6 Sistema de control de retroalimentación a un RTTAFC. La velocidad de flujo de enfriamiento se ajusta midiendo la temperatura del reactor.

Las ecuaciones del diseño se derivan por linealización, exactamente en la misma forma que se utilizó para obtener las ecuaciones 13.14 y 13.15. Sea $x = c_A - c_{As}$, $x_f = c_{Af} - c_{Afs}$, $y = T - T_s$, $y_f = T_f - T_{fs}$, y defina una nueva variable $w = u - u_s$, donde u_s se calcula en condiciones constantes,

Cuando estas variables se substituyen en las ecuaciones 13.1 y 13.5 se obtiene, después de linealizar,

$$\theta \frac{dx}{dt} = -[1 + k_0 \theta e^{-E/RT_s}]x - \left[\frac{k_0 \theta c_{As} E e^{-E/RT_s}}{RT_s^2} \right] y + x_f \quad (13.35)$$

$$\theta \frac{dy}{dt} = [Jk_0 \theta e^{-E/RT_s}]x - \left[1 + u_s - \frac{Jk_0 \theta c_{As} E e^{-E/RT_s}}{RT_s^2} \right] y - [T_s - T_{cf}]w + y_f \quad (13.36)$$

La ecuación 13.35 es idéntica a la 13.1, mientras que la ecuación 13.36 difiere de la 13.5, solamente por el término adicional $-[T_s - T_{cf}]w$.

La estrategia de control consiste en aumentar u cuando se desea disminuir la temperatura. Por consiguiente, w y y deben tener el mismo signo algebraico. El esquema más simple es el *control proporcional*, en donde el cambio de u se considera proporcional al cambio en T .

$$w = Ky \quad (13.37)$$

De esta forma, cuando la temperatura varía considerablemente, el esfuerzo para controlar es grande, y para pequeños cambios en temperatura, es pequeño. Note que la acción de control no se basa en la observación directa de la fluctuación de la concentración, que es la cantidad en que realmente se está interesado. Al substituir la ecuación 13.37 en la 13.36 se tiene la ecuación final de trabajo para la temperatura:

$$\theta \frac{dy}{dt} = [Jk_0 \theta e^{-E/RT_s}]x - \left\{ 1 + u_s + K[T_s - T_{cf}] - \frac{Jk_0 \theta E e^{-E/RT_s}}{RT_s^2} \right\} y + y_f \quad (13.38)$$

Combinando las ecuaciones 13.35 y 13.38 en una sola ecuación de segundo orden para la concentración, se obtiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A_1 \frac{dx}{dt} + A_0 x = F_1(t) \quad (13.39)$$

$$A_1 = a_1 + \frac{1}{\theta} K[T_s - T_{cf}]$$

$$A_0 = a_0 + \frac{1}{\theta^2} K[T_s - T_{cf}][1 + k_0 \theta e^{-E/RT_s}]$$

$$F_1(t) = f_1(t) + \frac{1}{\theta^2} K[T_s - T_{cf}]x_f$$

466 Sistemas no isotérmicos

a_1 , a_0 , y $f_1(t)$ son definidas por las ecuaciones 13.18 y 13.19.

El efecto principal del sistema de control, es aumentar los coeficientes de la ecuación característica y, por consiguiente, hacer las raíces más negativas. De esta forma, *se acelera la respuesta transitoria*. Reconsiderando el problema relativo a la respuesta parcial de la sección 13.5, puede obtenerse una medida cuantitativa del efecto del control. En ese caso, para $x_f = 0$, $y_f = \text{constante}$, la solución análoga a la ecuación 13.32 es:

$$x(t) = \frac{-k_0 c_{As} E e^{-E/RT_s} y_f}{\left\{ a_0 + \frac{1}{\theta^2} K [T_s - T_{cf}] [1 + k_0 \theta e^{-E/RT_s}] \right\} R T_s^2} \times \left[1 + \frac{M_2}{M_1 - M_2} e^{M_1 t} - \frac{M_1}{M_1 - M_2} e^{M_2 t} \right] \quad (13.40)$$

M_1 y M_2 son raíces de la ecuación característica:

$$M^2 + A_1 M + A_0 = 0 \quad (13.41)$$

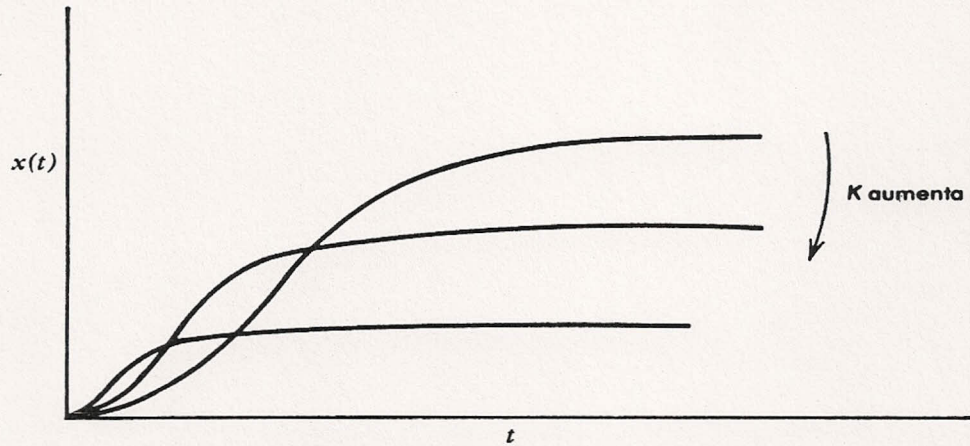


FIGURA 13.7 Cambio en la concentración de un RTT AFC con raíces características reales para un cambio gradual constante en la temperatura de alimentación a diversos niveles de control proporcional de retroalimentación.

En la figura 13.7 se muestran las respuestas transitorias para diversos valores de la *ganancia de retroalimentación* K . La selección de K puede hacerse sobre la base del valor máximo esperado de $|y_f|$ y el valor mínimo permitido de $|x(t)|$, en forma similar a como se realizó en el capítulo 4. Note que cuando k es suficientemente grande, el estado estable final $x(\infty)$ calculado de la ecuación 13.41 puede hacerse tan cercano a cero como se desee.

También es interesante comparar la respuesta de la concentración del efluente con un cambio en la temperatura de alimentación, calculada anteriormente, con la respuesta a un cambio brusco en la concentración de alimentación. En este caso, $y_f = 0$, $x_f = \text{constante}$ y:

$$F_1(t) = \frac{1}{\theta^2} \left\{ 1 + u + K[T_s - T_{cf}] - \frac{Jk_0\theta c_{As} E e^{-E/RT_s}}{RT_s^2} \right\} x_f$$

La solución homogénea es la misma, $C_1 e^{M_1 t} + C_2 e^{M_2 t}$, y la solución particular se determina como antes. En el tiempo cero se tiene $x(0) = y(0) = 0$. La condición inicial para dx/dt se obtiene con la ecuación 13.35.

$$t = 0: \quad \frac{dx}{dt}(0) = \frac{1}{\theta} x_f$$

Utilizando estas condiciones iniciales para evaluar las constantes, se encuentra que la solución es:

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{\{1 + u + K[T_s - T_{cf}] - [Jk_0\theta c_{As} E e^{-E/RT_s} / RT_s^2]\} x_f}{a_0\theta^2 + K[T_s - T_{cf}][1 + k_0\theta e^{-E/RT_s}]} \\ & \times \left\{ 1 + \frac{M_2}{M_1 - M_2} e^{M_1 t} - \frac{M_1}{M_1 - M_2} e^{M_2 t} \right\} \\ & + \frac{x_f}{\theta[M_1 - M_2]} [e^{M_1 t} - e^{M_2 t}] \end{aligned} \quad (13.42)$$

En este caso, K aparece tanto en el numerador como en el denominador, de manera que $x(t)$ nunca puede dirigirse a cero para la constante x_f diferente de cero. Para K grande se obtiene:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} x(\infty) = \frac{x_f}{1 + k_0\theta e^{-E/RT_s}}$$

Por consiguiente, no hay ninguna ventaja en hacer la ganancia excesivamente grande. Esta imposibilidad de eliminar completamente una fluctuación en la concentración de alimentación, es una consecuencia de la estructura que se ha adoptado para el sistema de control. Más aún, toda la estrategia está basada en las temperaturas, a pesar de que la cantidad que realmente interesa es la concentración.

Si se considera que w tiene una dependencia más general de y que la de la ecuación 13.37, de todas formas se conserva la estructura lineal de las ecuaciones, y la capacidad de diseñar dispositivos eléctricos y mecánicos simples para efectuar el control. La mayoría de los sistemas de control utilizados en las aplicaciones de proceso entran en la categoría general de *controles de tres formas*

$$w = K_1 y + K_2 \frac{dy}{dt} + K_3 \int_0^t y(\tau) d\tau \quad (13.43)$$

En los problemas se exponen las propiedades que introducen las *formas de derivada e integral*. Debe aclararse que el ejemplo del reactor que se utiliza aquí, es único en un aspecto importante. Aunque puede no ser útil económicamente, lograr que la ganancia proporcional K sea excesivamente grande, no hay nada perjudicial en ello. Para situaciones distintas a la que se considera aquí, es posible hacer un sistema inestable considerando una ganancia demasiado grande. Por consiguiente, habrá un límite superior en los parámetros de control. Esto, también, se deja a los problemas.

13.8 CONCLUSIONES

En este capítulo no se introducen principios físicos nuevos. Sin embargo, el capítulo es una prueba para la capacidad del lector para leer matemáticas. Frecuentemente, se hace referencia al capítulo 17 sobre ecuaciones diferenciales, y debe consultarse, o bien consultar un texto sobre ecuaciones diferenciales si hay dificultad. Fuera del uso de las ecuaciones lineales diferenciales de segundo orden para expresar el comportamiento del modelo, el nuevo concepto es el de linealizar las ecuaciones del modelo para operar lo más cerca posible al estado estable.

Este capítulo contiene una introducción a lo que se conoce generalmente como dinámica del proceso y control. La mayoría de los textos en esta área suponen que el lector es capaz de desarrollar un modelo, y enfatizan las consecuencias de la manipulación matemática de las ecuaciones del modelo. Algunos de los textos básicos escritos para ingenieros químicos son:

- 13.1 P. S. Buckley, *Techniques of Process Control*, Wiley, New York, 1964.
- 13.2 D. R. Coughanowr and L. B. Koppel, *Process Systems Analysis and Control*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- 13.3 J. M. Douglas, *Process Dynamics and Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1972.
- 13.4 P. Harriott, *Process Control*, McGraw-Hill, New York, 1964.
- 13.5 D. D. Perlmutter, *Introduction to Process Control*, Wiley, New York, 1965.

En la sección 22 de *Chemical Engineers' Handbook* hay un estudio bastante extenso sobre instrumentación del control.

- 13.6 J. H. Perry, *Chemical Engineers' Handbook*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1963.

Las analogías mencionadas en la sección 13.6 son la base del estudio en la obra:

- 13.7 J. L. Shearer, A. T. Murphy, and H. H. Richardson, *Introduction to System Dynamics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967.

En la obra siguiente se trata la aplicación a los problemas fisiológicos:

- 13.8 J. H. Milsum, *Biological Control Systems Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1969.

En los primeros capítulos de la obra siguiente, se encuentra una introducción a la teoría del control óptimo:

- 13.9 M. M. Denn, *Optimization by Variational Methods*, McGraw-Hill, New York, 1969.

Las implicaciones de la retroalimentación se tratan en términos cualitativos y algunas veces filosóficos, en una colección de artículos de la revista *Scientific American* que se ha publicado como libro:

- 13.10 *Automatic Control*, Simon And Schuster, New York, 1955.

13.9 PROBLEMAS

- 13.1 Al pasar de la ecuación 13.3 a la 13.4, se indicó que cuando θ_c es pequeña en comparación con θ , debe despreciarse el término $\theta_c [dT_c/dt]$ en la ecuación para T_c . Este problema conduce a los pasos necesarios para demostrar esto en forma rigurosa.

(a) El "tiempo natural" para la respuesta de temperatura y concentración es θ . Sea $\tau = t/\theta$, $\varepsilon = \theta_c/\theta[1 + K]$. Demuestre que la solución a la ecuación 13.3 es

$$T_c(\tau) = T_{c0}e^{-\tau/\varepsilon} + \int_0^\tau \left[\frac{1}{\varepsilon} e^{-\lambda/\varepsilon} \right] \frac{KT(\tau - \lambda) + T_{cf}}{1 + K} d\lambda$$

T_{c0} es el valor de T_c en el tiempo cero. Es posible, que desee referirse a la sección 15.10.

(b) Considere ε un número pequeño, por ejemplo $\varepsilon = 0.05$. Grafique $[1/\varepsilon]e^{-\lambda/\varepsilon}$ respecto a λ . Note que la función es diferente de cero, solamente para λ entre cero y 5ε . En forma similar, para τ mayor que un valor 5ε , $e^{-\tau/\varepsilon} \simeq 0$.

(c) Ahora puede escribirse:

$$T_c(\tau) \simeq \int_0^{5\varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} e^{-\lambda/\varepsilon} \right] \frac{KT(\tau - \lambda) + T_{cf}}{1 + K} d\lambda$$

Demuestre la expresión $T(\tau - \lambda) \simeq T(\tau)$ para $0 \leq \lambda \leq 5\varepsilon$. Por consiguiente, escriba:

470 Sistemas no isotérmicos

$$T_c \simeq \frac{KT + T_{cf}}{1 + K} \int_0^{5\epsilon} \frac{1}{\epsilon} e^{-\lambda/\epsilon} d\lambda$$

(d) Lleve a cabo la integración, y demuestre que conduce a la ecuación 13.4.

- 13.2 El crecimiento intermitente de poblaciones microbianas puede ser descrito, aproximadamente, mediante la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 x(1 - k_2 x)$$

donde x es la masa total del bio-organismo.

(a) Demuestre que la ecuación puede ponerse en la forma $dy/d\tau = y[1 - y]$ y calcule $y(\tau)$. Grafique la solución para las condiciones iniciales:

$$y(0) = 0, 0.05, 0.50, 0.95, 1.00$$

- (b) ¿Cuáles son los estados estables del sistema? ¿Son estables o inestables? Dé una explicación desde el punto de vista físico.
- (c) *Linealice* la ecuación para y en *cada uno* de los estados estables y resuélvala. Calcule cada solución linealizada junto con la solución exacta para las tres condiciones iniciales intermedias en la parte (b). ¿Qué conclusiones se pueden obtener?
- 13.3 Considere un reactor tipo tanque agitado de flujo continuo *adiabático* descrito por las ecuaciones 13.1 y 13.2 con $u = 0$.

(a) Demuestre que cuando las condiciones de $t = 0$ satisfacen la *relación especial*

$$Jc_A(0) + T(0) = Jc_{Af} + T_f$$

se obtiene una sola ecuación diferencial de primer orden para T .

(b) Manipule la ecuación para T , transformándola a:

$$t = \int_{T(0)}^{T(t)} \frac{dT}{F(T)}$$

Utilizando los parámetros del reactor del ejemplo 16.1, aplique la regla del trapecioide (sección 15.6) para graficar T con respecto a t en las siguientes condiciones iniciales:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| (i) $T(0) = 300^\circ\text{K}$ | $c_A(0) = 0.533 \text{ moles/pie}^3$ |
| (ii) $T(0) = 350$ | $c_A(0) = 0.385$ |
| (iii) $T(0) = 390$ | $c_A(0) = 0.267$ |
| (iv) $T(0) = 395$ | $c_A(0) = 0.252$ |
| (v) $T(0) = 425$ | $c_A(0) = 0.163$ |
| (vi) $T(0) = 480.2$ | $c_A(0) = 0$ |

- (c) Para los casos (i), (iii), (iv), y (vi) de la parte (b), que están cerca del estado estable, utilice las ecuaciones 13.17 linealizadas y los parámetros dados al final de la sección 13.2 para obtener $T(t)$. ¿Cómo se compara la solución lineal con la solución a la ecuación no lineal?
- (d) Para los casos (ii) y (v) en la parte (b) compare la solución no lineal con la solución de la ecuación linealizada. Utilice el estado estable, con temperatura superior e inferior a la inicial para los parámetros de la ecuación linealizada.
- 13.4** Desarrolle métodos numéricos análogos a las ecuaciones 17.18 y 17.19 para las ecuaciones diferenciales simultáneas.

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y) \quad x(0) = x_0$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x, y) \quad y(0) = y_0$$

- 13.5** (a) Utilice el resultado del problema 13.4 o una rutina de biblioteca que pueda conseguir de su centro de cálculo, para repetir algunos de los cálculos de la parte (c) del problema 13.3, resolviendo *numéricamente* las ecuaciones linealizadas del reactor, 13.14 y 13.15. La comparación de las soluciones numéricas y las soluciones analíticas a las ecuaciones linealizadas proporciona una verificación del método numérico. Puede utilizarse una calculadora, ya que una regla de cálculo no proporciona la exactitud suficiente.
- (b) Obtenga soluciones numéricas para los reactores adiabáticos *no lineales*. Ecuaciones 13.1 y 13.2 donde $u = 0$ para las condiciones iniciales dadas en los casos (ii) y (v) del problema 13.3, parte (b). Verifique sus cálculos, comparando con la integración numérica en la parte (b) del problema 13.3.
- (c) Si está utilizando un programa de computadora, seleccione otras condiciones iniciales que no satisfagan $Jc_A(0) + T(0) = Jc_{Af} + T_f$ e integre las ecuaciones no lineales. Grafique los resultados en el "plano de fase" como se hizo en la figura 12.15, y compare con los cálculos, utilizando el método de isoclinas (ecuación 12.61). Es posible, que su centro de cálculo disponga de un programa para la graficación en el plano de fase.
- 13.6** La reacción irreversible $A \rightarrow$ productos, tiene una velocidad de reacción $r_{A-} = k_0 e^{-E/RT} c^n$. Deduzca las ecuaciones transitorias linealizadas para un reactor agitado tipo tanque de flujo continuo adiabático que opera cerca del estado estable. Verifique su resulta-

472 Sistemas no isotérmicos

do haciendo $n = 1$, comparando con las ecuaciones 13.14 y 13.15 para $u = 0$.

- 13.7 Considere el problema de control en la sección 13.7. Demuestre que para un control *proporcional-más-integral*:

$$w = K_1 y + K_3 \int_0^t y(\tau) d\tau$$

la fluctuación de temperatura $y(t)$ irá a un valor de cero en el estado estable para x_f y y_f constantes con K_1 finita.

- 13.8 Para el problema de control en la sección 13.7, suponga que se desea utilizar un control *proporcional-más-derivada*

$$w = K_1 y + K_2 \frac{dy}{dt}$$

Deduzca el efecto de la constante K_2 para la forma de derivada.

- 13.9 Considere el problema de control de la sección 13.7. Demuestre que una fluctuación en la concentración resultante de un cambio brusco en la concentración de alimentación, no puede eliminarse mediante un sistema de control de retroalimentación que solamente ajuste la velocidad de flujo del fluido de enfriamiento, basándose en la desviación de temperatura.

- 13.10 Para el problema de control descrito en la sección 13.7, suponga que u se mantiene constante, pero se ajusta q la velocidad de flujo a través del reactor. Por consiguiente, tome el tiempo de residencia θ como variable del control, y sea

$$\tau = \frac{V}{q} - \theta_s$$

Obtenga las ecuaciones linealizadas apropiadas, y determine el efecto de un controlador proporcional en donde τ es proporcional a y .

- 13.11 La siguiente ecuación describe un proceso controlado:

$$\frac{d^3 x}{dt^3} + 6 \frac{d^2 x}{dt^2} + 11 \frac{dx}{dt} + 6x = u(t)$$

$$u(t) = -Kx$$

Demuestre que cuando $K > 60$ el sistema se inestabiliza. (Nota: la ecuación característica puede resolverse simplemente en términos de K . Utilice la fórmula para una ecuación cúbica que aparece en *Chemical Engineers' Handbook* o en un libro de álgebra. Si lo desea, suponga $K \gg 1$ para simplificar las relaciones.