CAPITULO 2

Conceptos básicos del análisis

2.1 INTRODUCCION

La solución adecuada a los problemas de ingeniería química requiere que se describa cuantitativamente o se *modele* el comportamiento de los elementos de un proceso. Esto se hace aplicando los principios de química, física y matemáticas para obtener las ecuaciones. Estas ecuaciones pueden entonces utilizarse para predecir lo que resulta en determinadas circunstancias. De esta manera se sabe el efecto que tendrá sobre el producto final un cambio de la temperatura a que opera un reactor, o el tamaño de la tubería en un intercambiador de calor. El proceso de análisis es directo y sistemático. En este capítulo se examinará este enfoque y se observará cómo puede obtenerse un modelo útil de una unidad de proceso sencilla, dando una idea general de los factores que se han de considerar en situaciones más complejas.

2.2 EL PROCESO DE ANALISIS

Al final del capítulo 1 se enunciaron los objetivos específicos del análisis: descripción de casos específicos, predicción del comportamiento, comparación con el comportamiento verdadero, evaluación de las limitaciones del modelo y predicción y diseño. La secuencia lógica del proceso se muestra como un diagrama de flujo en la figura 2.1. El objetivo es considerar detalladamente cada etapa del proceso y entender totalmente las interacciones entre los diferentes pasos para lograr la máxima eficiencia. El estudio se iniciará siguiendo los pasos indicados en la figura.

Ya se ha hablado de la gran variedad de situaciones físicas que son de interés para los ingenieros químicos. Estas incluyen equipo para procesar, por ejemplo, reactores, intercambiadores de calor y columnas de destilación y equipo de laboratorio para determinar los datos básicos de diseño o

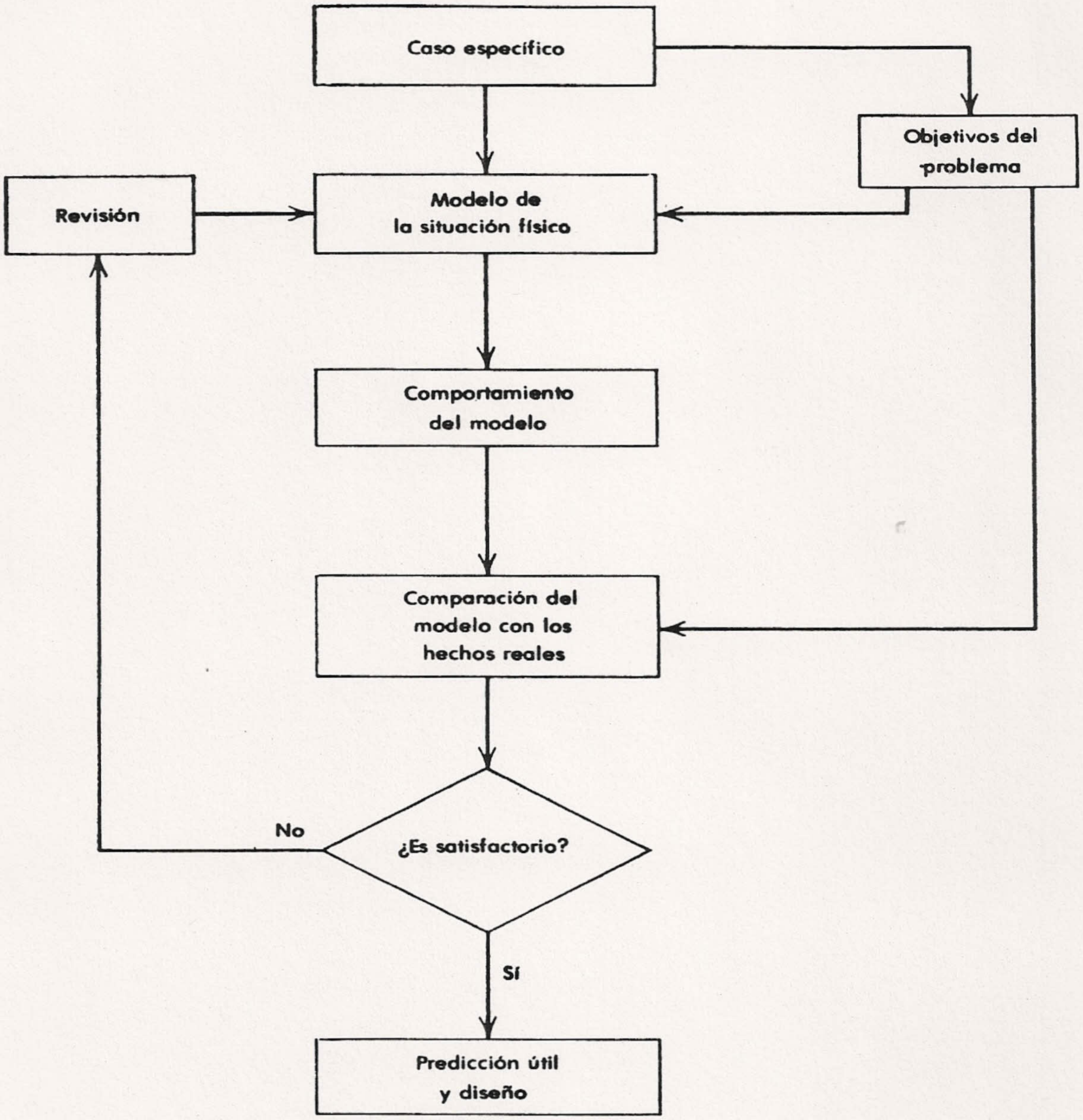

FIGURA 2.1 El proceso de análisis.

para investigar los principios físicos. Se podría necesitar una descripción matemática de las propiedades de un material, por ejemplo un gas, en función de su configuración molecular o la descripción de una membrana porosa en cuanto a su composición y preparación. Ya sea que se quiera describir el funcionamiento de una parte del equipo, una parte del sistema circulatorio humano o cualquier otro fenómeno fisicoquímico, la elaboración del modelo matemático se efectúa de la misma manera.

Las partes básicas de cualquier descripción matemática son los principios de conservación de masa, energía y cantidad de movimiento. Considerándolos junto con otros postulados fundamentales de física como la atracción gravitacional, sería posible, *en principio*, obtener la descripción matemática de cualquier fenómeno. Lógicamente esto no puede esperarse, y de hecho es evidente que la física se dedica precisamente a la obtención de una descripción completa de la naturaleza, a partir de sus principios fundamentales, y no obstante, la física es una ciencia muy activa. Recuerde en el curso de física básica era muy difícil describir el estado de un gas puro que no reacciona, en función del comportamiento de los millones de moléculas que intervienen. De esta manera se puede suponer que habrá muchos casos de interés para el ingeniero que resultan demasiado complejos para que las leyes de física puedan aplicarse en su forma más fundamental. Por lo tanto, se necesita una fuente secundaria en la que sea posible basarse para obtener modelos matemáticos. Esta fuente no fundamental, tan esencial para el análisis de ingeniería, produce lo que se ha designado como una *relación constitutiva*. Estas relaciones se desarrollan generalmente a partir de experimentaciones cuidadosas relativas a situaciones específicas. El objetivo fundamental de este texto es desarrollar un enfoque sistemático para la descripción matemática, utilizando las leyes de la conservación y las relaciones constitutivas. Gran parte del siguiente material se dedica a tratar de alcanzar dichos objetivos.

La mayoría de las descripciones matemáticas representarán una combinación esencial de la complejidad inherente a la descripción detallada de un caso real, y la sencillez requerida, de tal manera, que el modelo pueda ser comparado con el experimento y después utilizarse para el diseño. El grado de relación depende de los objetivos específicos del problema y se incluye en la tarea de obtención del modelo.

Dada una descripción matemática, es necesario verificar su exactitud antes de utilizarla para propósitos de ingeniería. Esto requiere resolver las ecuaciones que predicen el comportamiento del modelo matemático, en condiciones donde pueda hacerse una comparación directa con el comportamiento real. Usualmente se requiere el álgebra y el cálculo diferencial e integral, para determinar el comportamiento de un modelo y en muchos casos, la utilización de técnicas numéricas y el uso de computadoras automáticas. Las matemáticas aplicadas son una herramienta esencial en el análisis del proceso, aunque aquí se hará un mayor énfasis sobre otras partes del análisis.

Se puede manipular el modelo matemático para observar cómo reaccionan entre sí las variables del problema y cuál es el efecto de los parámetros del modelo sobre el comportamiento del mismo. Esta información puede utilizarse para planear en forma apropiada los experimentos, y así probar el grado de validez del modelo matemático e interpretar los resultados experimentales. El proceso de comparación es una característica esencial en los procesos del análisis de ingeniería, porque es aquí donde el ingeniero da el valor a sus juicios acerca de la utilidad y confiabilidad de un modelo respecto a la predicción y diseño subsecuente. Si en realidad, para cierto conjunto de objetivos, la comparación entre el modelo y la realidad física es adecuada, entonces se puede proceder a utilizar el modelo; si no es así, se debe considerar por qué la comparación no es adecuada, hacer las modificaciones pertinentes y comparar de nuevo.

2.3 UN EJEMPLO SENCILLO

Antes de iniciar el estudio detallado del análisis de un proceso, será de utilidad ilustrar mediante un ejemplo sencillo algunos de los conceptos descritos brevemente en la sección previa. La situación física se muestra en la figura 2.2. Un tanque de sección transversal constante, que inicialmente está lleno con un líquido a una altura h_0, se vacía mediante flujo a través de

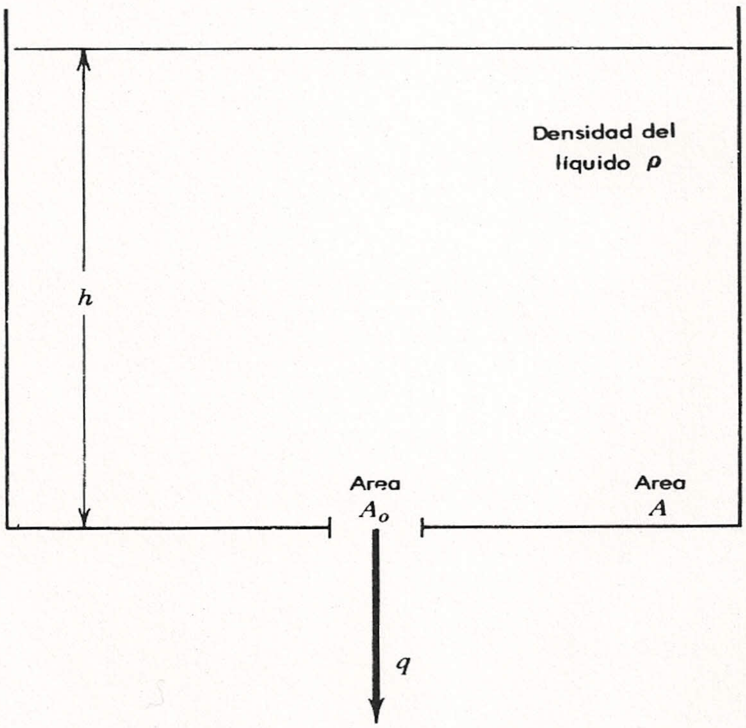

FIGURA 2.2 Vaciado de un tanque a través de un orificio que está situado en el fondo.

un *orificio* situado en la base. Los objetivos que se persiguen pueden ser la respuesta a todas o a algunas de las siguientes preguntas:

1. ¿Cuánto tardará en vaciarse el tanque?
2. ¿Cómo varía la altura del líquido con el tiempo?
3. ¿Cómo varía la cantidad de flujo del líquido a través del orificio con la altura del líquido?

El vaciado del tanque es una situación física con la que la mayoría de la gente ha tenido experiencia directa, y si no es así, la experiencia se puede obtener rápidamente haciendo un orificio en una lata grande que se llena con agua; luego se observa el comportamiento a medida que el líquido fluye. La observación demuestra que el nivel en el tanque disminuye con el tiempo, y el proceso se efectúa a una temperatura constante. También muestra que la velocidad de flujo a través del orificio varía con la altura del líquido y con el tamaño del orificio de salida. Si se desea obtener respuestas cuantitativas a las preguntas enunciadas es necesario simbolizar el problema y utilizar descripciones matemáticas. Primero será conveniente definir un conjunto de símbolos:

- q flujo volumétrico del tanque medido en pies cúbicos por segundo.
- A área seccional del tanque, en pies cuadrados.
- A_0 área seccional del orificio, en pies cuadrados.
- h altura del líquido en cualquier tiempo, en pies.
- ρ densidad del líquido, en libras por pie cúbico.
- t tiempo, en segundos.

Los capítulos posteriores ilustrarán la aplicación precisa de los principios de conservación a la descripción de estos procesos. En este punto la simplificación del problema permitirá que el modelo se elabore sobre bases más intuitivas. *La conservación de la masa requiere claramente que la velocidad de flujo de la masa que pasa a través del orificio sea igual a la velocidad a que cambia la masa dentro del tanque.* La masa que se encuentra en el tanque es igual a la densidad multiplicada por el volumen del líquido ρAh. El significado de la derivada con respecto al tiempo como una medida del cambio, indica que la velocidad del cambio de la masa en el tanque es $d[\rho Ah]/dt$. La velocidad a que fluye la masa es igual al producto de la velocidad del flujo volumétrico, q, y la densidad, o la masa por el volumen, ρ. De esta manera:

$$\frac{d[\rho Ah]}{dt} = -\rho q \tag{2.1}$$

donde el signo de resta indica que el flujo es hacia afuera con lo que se obtiene una disminución de la masa. Dado que ρ y A son constantes, puede escribirse:

$$\rho A \frac{dh}{dt} = -\rho q$$

o

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{q}{A} \tag{2.2}$$

La ecuación 2.2 es una ecuación sencilla que comprende dos cantidades desconocidas, es decir, la altura del líquido h, y la velocidad a que está fluyendo a través del tanque, q. Dado que se tienen dos incógnitas y solamente una ecuación, debe buscarse una segunda relación. En el capítulo 3 se verá cómo al considerar las dimensiones, en este problema se establece parcialmente una relación entre las variables q y h. En el capítulo 10 se expresará el principio de la conservación de la energía para este mismo propósito. No obstante aquí se considera un caso especial en que no se puede o no se quiere aplicar principios más complejos de conservación. La relación adicional entre q y h, es decir, la *relación básica*, deberá obtenerse por intuición y/o por experimentación. Se puede anticipar que la relación obtenida de esta manera será más específica que la obtenida en base a los principios fundamentales de la conservación; deberá tenerse gran cuidado en la aplicación de los resultados a situaciones diferentes a las de los experimentos efectuados.

Ahora se sabe que hay flujo a través del orificio porque la presión en el líquido en la base del tanque, es mayor que la presión atmosférica; de esta manera el líquido sale y a medida que sea mayor la diferencia de presión mayor será el flujo. La relación general se puede expresar como sigue:

$$q = q(\Delta p)$$

ésta indica que q, velocidad de flujo, es una función de Δp, cambio de presión en el orificio. Si la parte superior del tanque está abierta, entonces la presión ahí es la atmosférica. La presión que tiene el líquido en el fondo del tanque es superior a la presión atmosférica, en una cantidad equivalente al peso del líquido en la columna, el cual es proporcional a la altura del líquido. La diferencia de presión, o "la fuerza excitadora" para el flujo es, por lo tanto, proporcional a h. La relación funcional de q a h, expresada como $q(h)$, es la buscada como segunda relación para combinarla con la ecuación 2.2.

El procedimiento que se seguirá es postular la forma en que q depende de h (relación básica), despejar h en el modelo de la ecuación 2.2 y después comprobar la predicción del modelo con los datos experimentales. Si el modelo y los datos no concuerdan, se utilizará la forma en que éstos difieren, como guía al establecer una nueva dependencia. La dependencia más simple de q sobre h, es suponer que no hay ninguna dependencia, es decir, que q es igual a una constante: $q = c$. Esta relación no puede ser exacta para todos los valores de h, ya que a medida que h se aproxima a cero, q también debe aproximarse a cero, y por lo tanto no habrá flujo del tanque vacío. No obstante, es necesario considerar este caso, que es el más sencillo, como base para estudios posteriores, y porque en sí mismo es de interés.

La ecuación 2.2 para $q=c$, se transforma en:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{q}{A} \qquad (2.2)$$

Esta ecuación incluye la derivada de h, pero si se desea h en sí, será necesario efectuar una integración. Por supuesto la respuesta resulta evidente ya que sólo una función lineal del tiempo tiene una derivada constante; no obstante se seguirán todos los pasos lógicos. Si la ecuación 2.3 se aplica a todos los valores de tiempo, se tendrá una igualdad al sumar las ecuaciones para dos tiempos diferentes, o de hecho, para todos los tiempos. La adición de todos los tiempos es simplemente la integración, de tal manera que la integral del miembro izquierdo entre los dos puntos, sea igual a la integral del miembro derecho entre los mismos valores de tiempo. Esto es, para cualquiera de los puntos t_1 y t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dh}{dt}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{c}{A}\, dt = -\frac{c}{A}[t_2 - t_1] \qquad (2.4)$$

La integral de una derivada es simplemente la función evaluada en los puntos extremos, de tal manera que la ecuación 2.4 es:

$$h(t_2) - h(t_1) = -\frac{c}{A}[t_2 - t_1]$$

Es conveniente considerar t_1 como cero, y expresar la altura inicial como h_0, donde t_2 es cualquier tiempo, denotado simplemente por t. De esta manera en cualquier tiempo:

$$h(t) = h_0 - \frac{ct}{A} = h_0\left[1 - \frac{ct}{Ah_0}\right] \qquad (2.5)$$

Conforme al modelo, la altura será entonces una función lineal del tiempo con intercepción en h_0 y con pendiente —c/A. La tabla 2.1 muestra algunos de los datos de la altura del líquido con respecto al tiempo para tres experimentos realizados en un tanque de drenado, y los datos se grafican en la figura 2.3 como h y t. En la figura 2.3 los pequeños círculos negros representan los datos en la tabla 2.1. En la mayoría de los casos un círculo representa los tres tiempos determinados experimentalmente. Al examinar la gráfica salta a la vista que cualquier línea que pase a través de todos los datos será curva, y no una línea recta según se prevé en la ecuación 2.5. Si se observan los puntos con más atención, se podrá ver que h es lineal con respecto a t para valores pequeños de t. De hecho, puede trazarse la línea recta, que hasta donde se puede ver, pasa por los primeros cuatro o cinco puntos correspondientes a los datos. La línea continua de la figura 2.3 es la mejor estimación visual de esta línea y tiene una pendiente

TABLA 2.1 Altura del líquido con respecto al tiempo para el experimento del vaciado de un tanque (diámetro del tanque = 10.75 plg., altura del tanque = 12 plg., diámetro del orificio = 0.609 plg.)

Altura del líquido (pulgadas)	Tiempo (segundos)	Altura del líquido (pulgadas)	Tiempo (segundos)
12	0	6	36.4
	0		35.8
	0		36.4
11	5.8	5	43.8
	6.1		42.8
	5.9		43.8
10	10.9	4	51.0
	11.5		50.5
	11.6		51.6
9	16.6	3	60.2
	17.8		59.2
	17.2		60.6
8	23.0	2	71.0
	23.5		69.8
	23.0		71.4
7	30.0	1	85.0
	29.2		84.0
	29.8		85.2

de $-c/A = -0.174$ plg/seg. (En el capítulo 6 se harán otras consideraciones sobre el "trazo óptimo" de una curva.) El modelo representado gráficamente por esta línea predice $h(t)$ perfectamente a valores t menores de 25 seg ; pero a valores mayores de t el modelo predice alturas mucho menores que las obtenidas mediante los datos experimentales.

A la inversa, este comportamiento es el que podría haberse predicho suponiendo que la velocidad de flujo es constante. Durante las primeras etapas la altura cambia poco en relación con una fracción de la altura total, ya que no importa la forma en que q dependa de h, porque durante estas etapas q será casi constante. Sin embargo, a mayores valores de t, cuando la altura se acorta y la velocidad de flujo disminuye, la suposición de flujo constante significa que el modelo predice un flujo muy rápido, y por consiguiente un nivel demasiado bajo. Por lo tanto, si se planea usar el modelo para tiempos superiores a treinta segundos no puede evitarse tomar en cuenta el hecho de que q se convierte en cero a medida que h se dirige a cero.

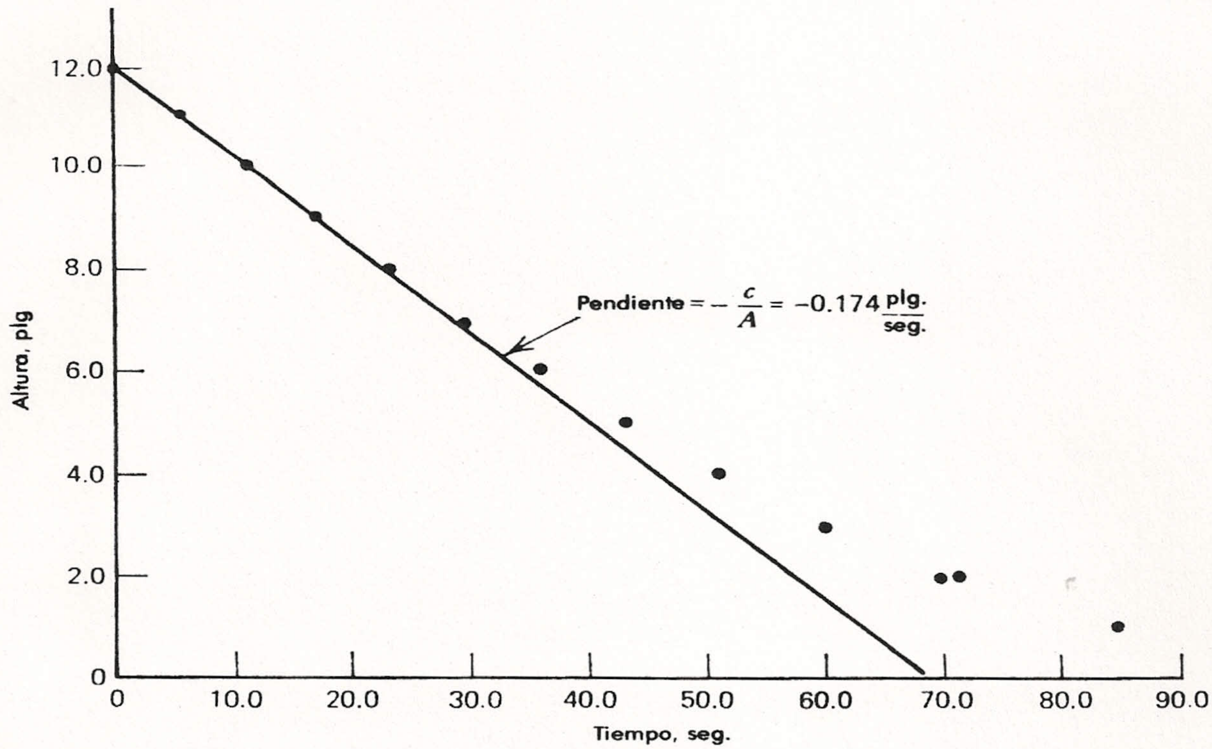

FIGURA 2.3 Gráfica de la altura del líquido con respecto al tiempo. La línea recta es la ecuación 2.5.

La forma más simple de expresar la desaparición del flujo de un tanque vacío es una forma lineal:

$$q = bh$$

Lógicamente esta corrección se estudia a continuación, ya que se desea encontrar la representación *más simple* que describa adecuadamente el vaciado de un tanque en un intervalo amplio. Entonces la ecuación 2.2 se transforma en:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{bh}{A} \tag{2.6}$$

Para este segundo modelo la secuencia lógica de integración para obtener h en función de t es un poco diferente. Efectivamente, es cierto que la integral del miembro izquierdo es igual a la integral de la derecha:

$$h(t_2) - h(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{bh}{A}\,dt$$

pero el resultado no tiene mucha utilidad, ya que para efectuar la integración de la derecha sería necesario saber como depende $h(t)$ de t, que es la respuesta buscada.

La integración se efectúa utilizando la simplificación de "separación de variables" descrita en la sección 15.9, con lo que la ecuación 2.6 puede escribirse simbólicamente como:

$$\frac{dh}{h} = -\frac{b}{A}\,dt \tag{2.7}$$

o, integrando entre los tiempos t_1 y t_2 y la altura desde su valor en t_1 hasta su valor en t_2 se tiene:

$$\int_{h(t_1)}^{h(t_2)} \frac{dh}{h} = -\frac{b}{A}\int_{t_1}^{t_2} dt$$

o

$$\ln\frac{h(t_2)}{h(t_1)} = -\frac{b}{A}\,[t_2 - t_1] \tag{2.8}$$

Asignando a t_1 valor de cero, y si t_2 denota cualquier tiempo, t:

$$\ln\frac{h(t)}{h_0} = -\frac{bt}{A} \tag{2.9}$$

y la exponencial en ambos miembros da como resultado:

$$h(t) = h_0e^{-bt/A} \tag{2.10}$$

La figura 2.4 es una gráfica de los datos de la tabla 2.1. El segundo modelo predice para h una dependencia exponencial de t, que es la curva particular definida por la cantidad b/A. Pueden seleccionarse varios valores de b/A, y trazar las curvas predichas hasta que se tenga la que se considera como el trazo óptimo para los datos. Sin la ventaja de elementos de matemáticas, esto debe determinarse visualmente, una tarea difícil en líneas curvas. El problema se evita examinando la ecuación 2.9, y observando qué logaritmo natural de h es lineal con respecto a t. La figura 2.5 muestra una gráfica del logaritmo natural de h en función de t. Trazando una línea recta a través de los primeros puntos, en la misma forma que se hizo para el modelo anterior (visualmente), se tiene que $-b/A = -0.0145$/seg. Esto determina la línea continua en la figura 2.4. Haciendo que q varíe con h, se ha desviado el comportamiento en la dirección deseada, pero de hecho no demasiado. El vaciado total requerirá un tiempo infinito.

Una generalización razonable del enfoque dado, es considerar la función que relaciona q y h sea de la forma:

$$q = kh^n$$

$n = 1$ es el caso que se consideró anteriormente; $n = 0$ es el primer caso; y n tendrá algún valor comprendido entre cero y la unidad, $0 < n < 1$, puesto

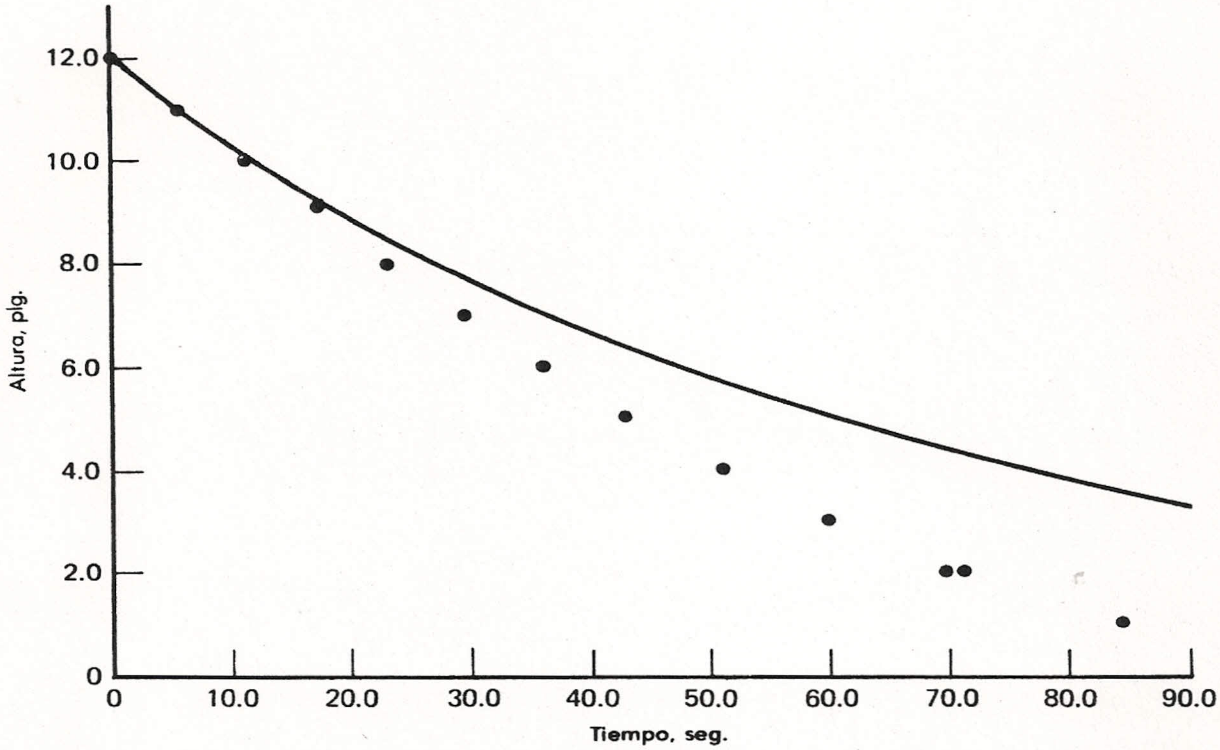

FIGURA 2.4 Gráfica de la altura del líquido con respecto al tiempo. La línea recta es la ecuación 2.10.

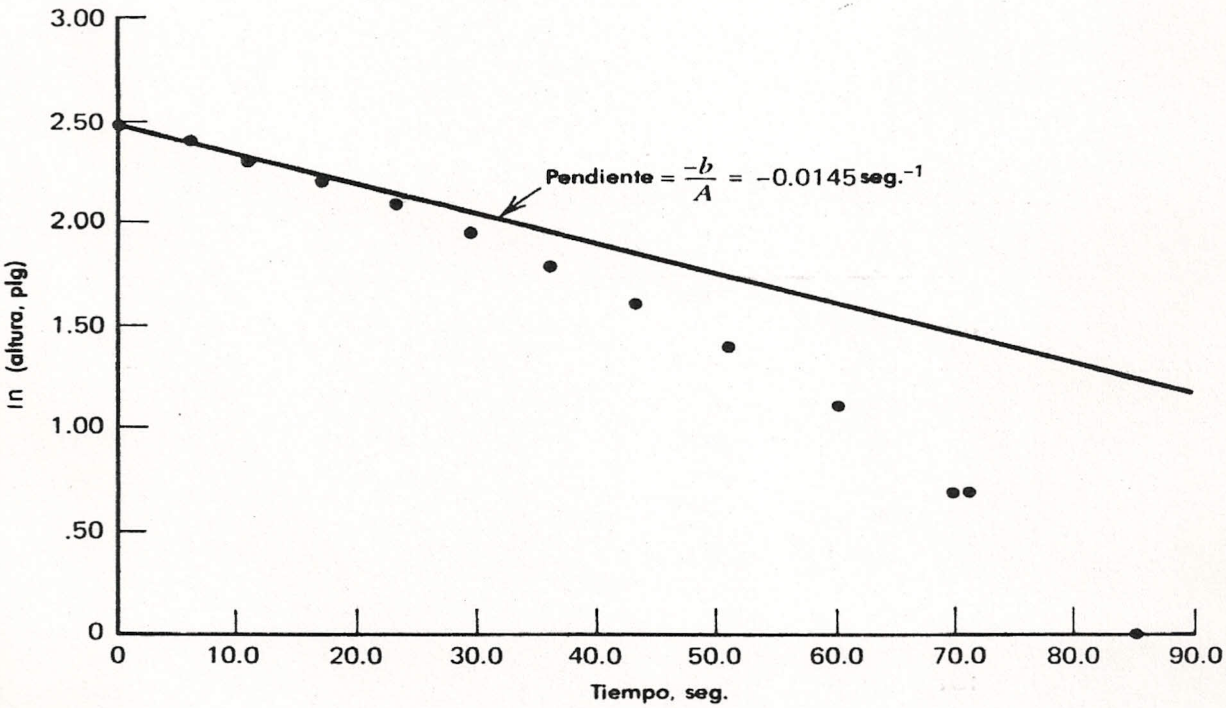

FIGURA 2.5 Gráfica del logaritmo natural de la altura del líquido con respecto al tiempo. La línea recta es la ecuación 2.9.

que un valor mayor de n requerirá un tiempo infinito para efectuar el vaciado. Entonces la ecuación 2.2 se transforma en:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{kh^n}{A}$$

o

$$\frac{1}{h^n}\frac{dh}{dt} = -\frac{k}{A}$$

Utilizando la notación simplificada pueden separarse las variables de la ecuación:

$$\frac{dh}{h^n} = -\frac{k}{A}\,dt$$

o, integrando el miembro derecho desde el tiempo cero hasta el tiempo actual, y el miembro izquierdo con respecto a h desde h_0 en el tiempo cero hasta h en el presente se obtiene:

$$\int_{h_0}^{h(t)} \frac{dh}{h^n} = -\frac{k}{A}\int_0^t d\tau$$

Al integrar se obtiene:

$$\frac{h^{1-n}}{1-n} - \frac{h_0^{1-n}}{1-n} = -\frac{kt}{A} \tag{2.11}$$

y despejando h en la ecuación algebraica se obtiene:

$$h(t) = h_0\left[1 - \frac{k[1-n]}{Ah_0^{1-n}}\,t\right]^{1/[1-n]} \tag{2.12}$$

Ese sistema permite el vaciado en un tiempo finito solamente para $n < 1$, de manera que es claro que ningún modelo que utilice $n > 1$, puede ser válido en intervalos demasiado largos.

De hecho, esta generalización aumenta la complejidad del análisis, ya que ahora hay *dos* parámetros, k y n, que deben ser determinados a partir del experimento. Una aproximación racional sería seleccionar un valor para n; graficar h^{1-n} y t según la ecuación 2.11 y rectificar la linearidad, seleccionando un nuevo valor de n de acuerdo a la forma en que los datos se desvían de la forma lineal. Por último, se llegará al valor "óptimo" de n que represente los datos y a encontrar el valor correspondiente a k. En la siguiente sección y, en el próximo capítulo, se mostrará que sin embargo, existen razones para creer que $n = 1/2$ es el valor adecuado, en cuyo caso la ecuación 2.11 se convierte en:

$$h^{1/2} = h_0^{1/2} - \frac{kt}{2A}$$

$$h = h_0\left[1 - \frac{kt}{2Ah_0^{1/2}}\right]^2$$

La figura 2.6 muestra la gráfica $h^{1/2}$ en función de t, y aunque los datos están un poco dispersos, la recta que pasa más cerca de todos los puntos tiene la pendiente $-k/2A = -0.0287$ plg. $^{1/2}$/seg. Entonces, se concluye que en este experimento, la velocidad de flujo, q, está representada adecuadamente por la relación:

$$q = 5.195h^{1/2}$$

ya que a partir de la tabla 2.1 se conoce el valor de A. (También puede construirse una línea a través de los primeros cuatro datos en la figura 2.6. Si esto se hace se encuentra que la pendiente de la línea es $-k/2A =$ -0.0264, ligeramente diferente del valor obtenido utilizando todos los puntos. Esto se debe a la dispersión en los datos.)

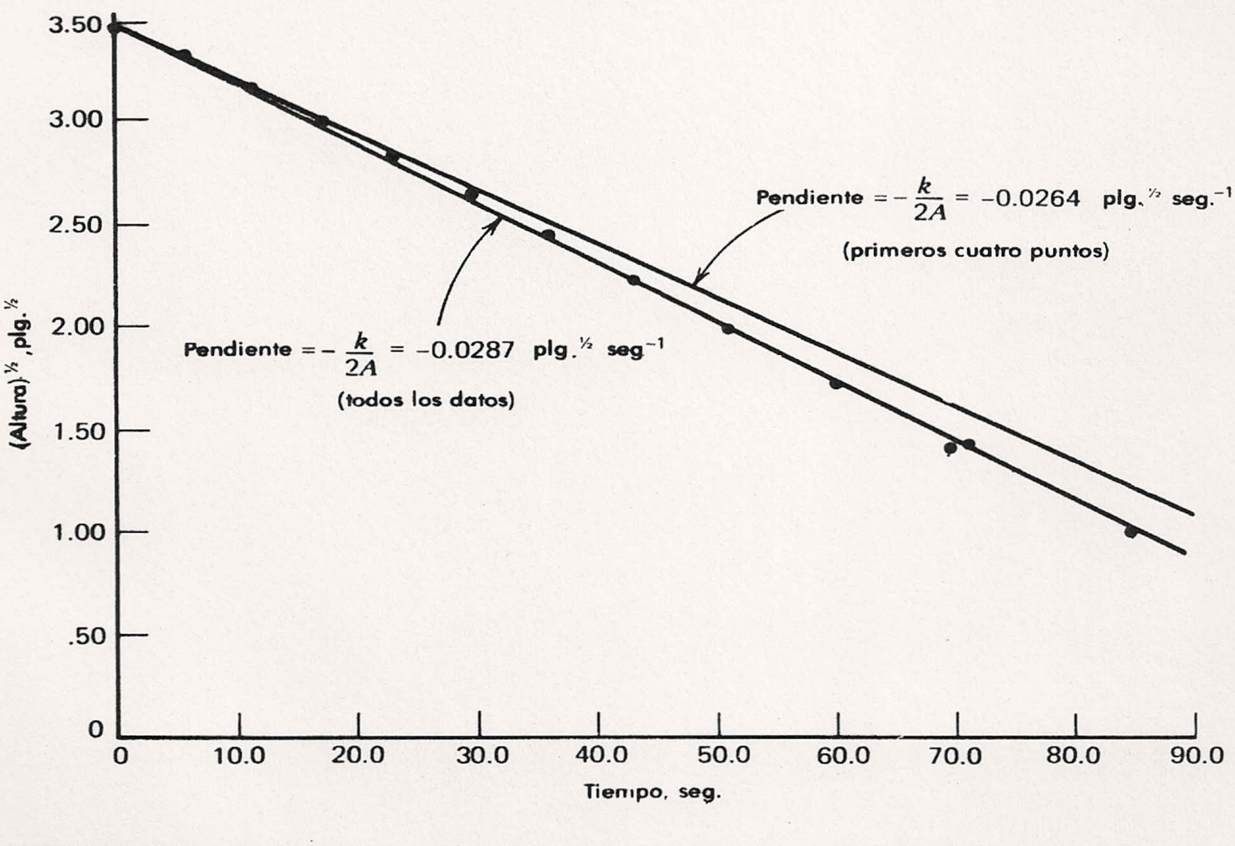

FIGURA 2.6 Gráfica de la raíz cuadrada de la altura del líquido con respecto al tiempo. Las líneas rectas son la ecuación 2.11 para $n = 1/2$.

El análisis del proceso se ha ilustrado hasta ahora lo suficiente a fin de obtener el modelo adecuado para estas condiciones físicas en particular. Es necesario considerar qué tan confiable es la descripción matemática al utilizarse para predecir el comportamiento de sistemas similares con fines de diseño. Por ejemplo, no se conoce la naturaleza del parámetro k, particularmente, cómo varían sus valores con diferentes tamaños de tanques y de orificios. No es seguro que $n = 1/2$, sirva para todos los casos en que haya flujo de un recipiente a causa de la presión hidrostática. La información adicional que se necesita puede obtenerse empíricamente si se programa una serie de experimentos para examinar los parámetros de importancia. El análisis que se efectúa en el siguiente capítulo, puede simplificar considerablemente, y dirigir este diseño de experimento.

Al comparar los modelos propuestos y los resultados reales de un experimento, se ha observado un fenómeno de gran importancia y que merece mayor investigación. A continuación, se escriben nuevamente las tres ecuaciones que se obtuvieron; ecuaciones 2.5, 2.10, y 2.12.

$$q = c \qquad h(t) = h_0\left[1 - \frac{ct}{Ah_0}\right] \tag{2.5}$$

$$q = bh \qquad h(t) = h_0 e^{-bt/A} \tag{2.10}$$

$$q = kh^n \qquad h(t) = h_0\left[1 - \frac{k[1-n]t}{Ah_0^{1-n}}\right]^{1/[1-n]} \tag{2.12}$$

Se ha observado que cualquiera de estos modelos puede representar los datos si t es casi igual a 0. El empleo del teorema de Taylor, sección 15.8, proporciona una explicación. Considere primero la ecuación 2.10, que contiene una exponencial. Note que la exponencial, e^x, tiene una representación en forma de serie:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Si $(-bt/A)$ se representa por x en la ecuación 2.10, entonces puede escribirse para el modelo lineal:

$$h(t) = h_0\left\{1 - \frac{bt}{A} + \frac{1}{2}\left[\frac{bt}{A}\right]^2 - \cdots\right\}$$

Cuando t es pequeño, los términos cuadráticos, cúbicos y de orden superior, serán mucho más pequeños que los dos primeros (cuando $x = 0.1$, $x^2 = 0.01$, $x^3 = 0.001$, etc.), de manera que el segundo modelo predice más exactamente el comportamiento para tiempos cortos.

$$h(t) \simeq h_0\left[1 - \frac{bt}{A}\right] \tag{2.13}$$

Las ecuaciones 2.13 y 2.5 son idénticas, excepto por el coeficiente de t, y los valores de $b/A = 0.0145$ y $c/Ah_0 = 0.0145$ son los mismos, como debería ser cuando t es pequeño.

Las series de expansión se pueden utilizar en forma similar:

$$[1 + x]^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha[\alpha - 1]}{2} x^2 + \cdots$$

para escribir la ecuación 2.12, con $x = -k[1 - n]t/Ah_0^{1-n}$ y $\alpha = 1/[1 - n]$, como:

$$h(t) = h_0\left\{1 - \frac{kt}{Ah_0^{1-n}} + \frac{n}{2}\left[\frac{kt}{Ah_0^{1-n}}\right]^2 - \cdots\right\}$$

Para valores pequeños del tiempo, se calcula muy aproximadamente:

$$h(t) \simeq h_0\left[1 - \frac{kt}{Ah_0^{1-n}}\right] \tag{2.14}$$

El valor de $k/Ah_0^{1/2}$ observado experimentalmente puede calcularse en base a la pendiente mostrada en la figura 2.6. Su valor para valores pequeños de t es 0.0145, resultado idéntico a los que se obtienen con los dos primeros modelos.

Se establecen dos conclusiones. Todos los modelos investigados dan una dependencia funcional idéntica (lineal) entre h y t para tiempos pequeños. Por consiguiente, *un experimento mal diseñado con datos insuficientes no mostraría diferencias entre los modelos,* y se usaría para justificar el primer modelo investigado, aunque el uso de tal modelo para la predicción puede conducir a errores considerables en un problema donde los cambios de nivel sean una fracción significativa de la altura total. Por otra parte, es posible suponer aplicaciones donde solamente se requiera el comportamiento en un tiempo corto. En tal situación es suficiente el modelo más sencillo y no se necesitan complicaciones adicionales. Esto muestra el papel que el objetivo del problema tiene en la formulación del modelo y en la comparación, como se muestra en la figura 2.1.

Es necesario hacer otra observación. Se han empleado los términos "un tiempo pequeño" y "un tiempo largo" como si la variable pertinente fuera el tiempo real medido por un reloj. No es el caso, y este hecho tiene importantes aplicaciones físicas. Al examinar las ecuaciones 2.5, 2.13, y 2.14 se observa que $h(t)$ es función solamente de la cantidad ct/Ah_0 para el primer modelo; bt/A para el segundo; y $kt/Ah_0^{1/2}$ para el caso particular del tercero cuando $n = 1/2$. En estas cantidades deberá tenerse "un tiempo pequeño" si las aproximaciones utilizadas al deducir las ecuaciones 2.13 y 2.14 han de ser válidas. El significado de "tiempo pequeño" dependerá de la situación en particular. En el ejemplo que se ha estudiado un valor de c/Ah_0 (o b/A o $k/Ah_0^{1/2}$) igual a 0.0145/seg. fue suficientemente pequeño para producir una concordancia exacta entre las tres ecuaciones con tiempos hasta de 17 segundos. Si se lograra una concordancia del 10 por ciento, los términos podrían ser más grandes y estar en la categoría de "pequeños". De esta manera, se puede observar que no es el tiempo el que debe ser pequeño sino la relación de t/θ, donde se denominará a θ el *tiempo característico.* El tiempo característico para cada modelo es, respectivamente Ah_0/c, A/b, y $Ah_0^{1/2}/k$. Es fácil verificar que θ tiene en realidad dimensiones de tiempo. Para el primer caso c es la velocidad de flujo, con dimensiones de volumen por tiempo, mientras que Ah_0 es el volumen inicial. Un volumen dividido entre un volumen por tiempo tiene dimensiones de tiempo.

Al comprobar que t/θ es la agrupación clave de parámetros en este problema, podrá decidirse la complejidad del modelo requerido para cualquier situación física dada. Por ejemplo, si se estuviera diseñando un sistema de control para mantener un nivel constante en un tanque cuando existan cambios en los flujos de entrada y salida del tanque a partir de sus valores deseados y en un tiempo de duración t_D, se podría usar el primer modelo sencillo si t_D/θ para el tanque en cuestión, fuera, lo suficientemente pequeño, de tal manera que pudiera haber un error mínimo al utilizar el modelo sencillo en lugar de utilizar el correcto. Por otro lado, si las diferencias entre las predicciones de los dos modelos fueran significativas, sería necesario decidir entre obtener la predicción exacta con un modelo complejo, o utilizar una predicción más ó menos exacta, y un modelo más sencillo. La decisión no es crucial ya que ambos modelos son sencillos. En situaciones más complicadas a menudo la elección es difícil. Siempre deberá efectuarse un cuidadoso análisis para lograr la adaptación del modelo de la ecuación con el problema total. Si éste es parte de una descripción matemática más compleja, es más importante simplificar, mientras que si el modelo particular va a utilizarse solo, es preferible una predicción exacta.

2.4 ESTIMACION DE UN ORDEN

En lo antes expuesto se observa claramente la relación básica de los dos parámetros:

$$q = kh^n$$

al conocer el valor adecuado de n se simplifica considerablemente el análisis. En una relación de potencia de este tipo el valor de n es conocido como el *orden* del proceso. A menudo, con datos que estén libres de dispersión experimental, es posible estimar el orden dentro de límites bastante estrechos, y, por tanto, reducir o eliminar la naturaleza de los cálculos por aproximación.

La ecuación del modelo básico y la ecuación de la velocidad de flujo, 2.2, se combinan para dar:

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{k}{A} h^n$$

Si se toman logaritmos en ambos lados se obtiene:

$$\ln - \left[\frac{dh}{dt}\right] = \ln \frac{k}{A} + n \ln h \qquad (2.15)$$

De esta manera al graficar $\ln[-dh/dt]$ y $\ln h$ se tendrá una pendiente n. Sin embargo no se tienen datos disponibles de dh/dt. Si en los datos no hay errores y están muy cercanos entre sí en situaciones donde h cambia rápidamente, $-dh/dt$ se puede considerar como:

$$-\frac{dh}{dt} \simeq -\frac{\Delta h}{\Delta t}$$

donde Δh se refiere al cambio en la altura correspondiente a un cambio Δt en el tiempo. Entonces, aproximadamente:

$$\ln \left[-\frac{\Delta h}{\Delta t}\right] \simeq \ln \frac{k}{A} + n \ln h$$

En la tabla 2.2, se reproducen los datos altura-tiempo de la tabla 2.1 utilizando los tiempos promedio de las tres posibilidades experimentales graficados en la figura 2.7 como logaritmo de $-\Delta h/\Delta t$ y el logaritmo de h. Puesto que la derivada se estima en un intervalo de alturas, ésta se grafica como la altura media representando el intervalo con una banda. Aunque no puede hacerse un enunciado definitivo debido a la dispersión de los datos, es evidente que los valores medios en la región de menor dispersión, se agrupan mejor con una línea de pendiente $n = 0.5$. Cuando h es mayor de 9 plg. ($\ln h > 2.1$) la altura cambia con gran rapidez y hay demasiada dispersión, en estas estimaciones de derivadas para que puedan ser de alguna utilidad, y cualquier pendiente concordará igualmente con todos los datos. Esto equivale a la observación hecha previamente, de que todos los modelos son equivalentes para tiempos cortos.

Es esencial enfatizar que aun cuando las derivadas aproximativas constituyen un método útil y adecuado para estimar el orden (potencia) cuando

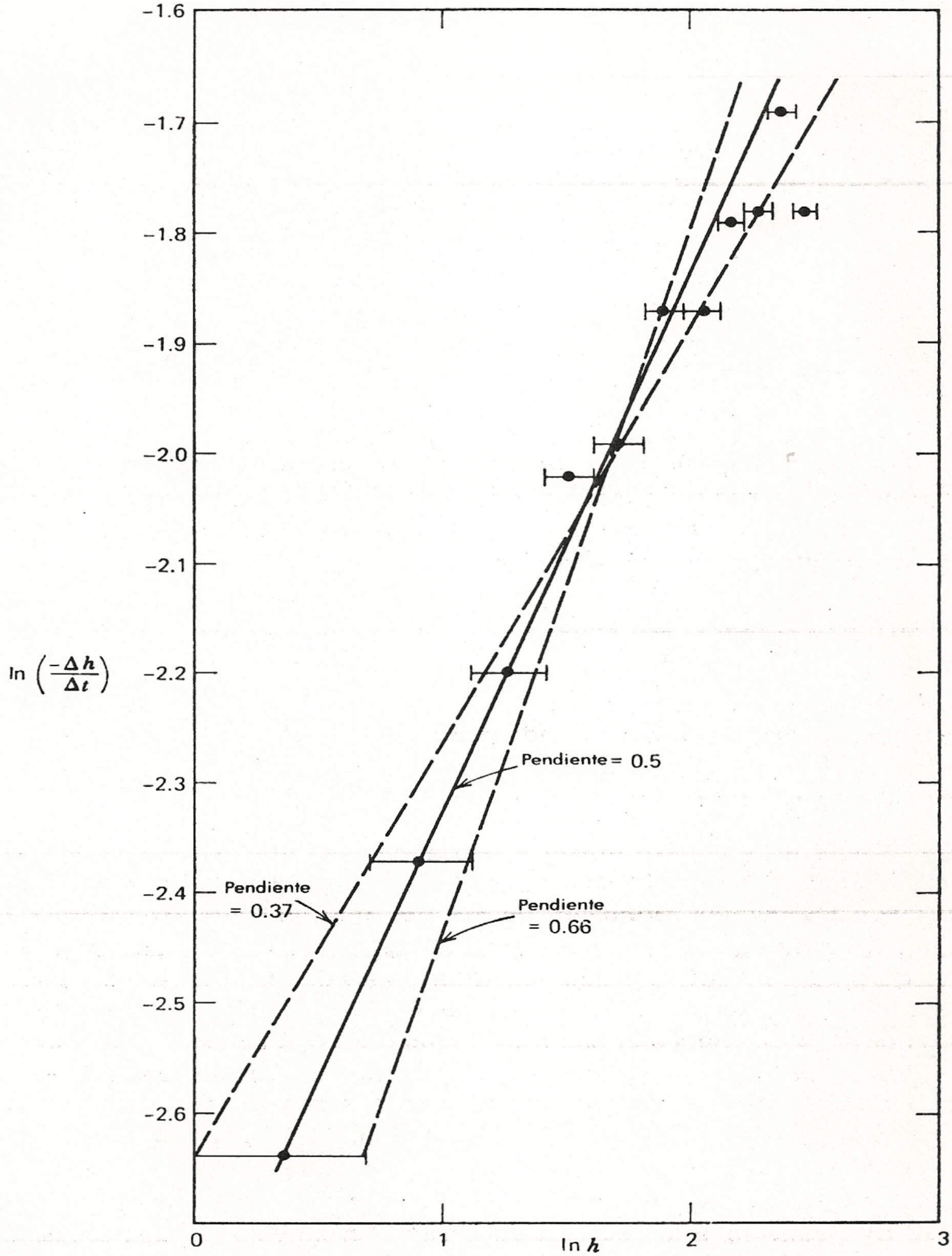

FIGURA 2.7 Gráfica del logaritmo natural de $-\Delta h/\Delta t$ con respecto al logaritmo natural de la altura. La banda representa el intervalo de alturas en que se calculó la pendiente.

TABLA 2.2 Altura del líquido con respecto al tiempo medio para el experimento del vaciado de un tanque para obtener ln $(-\Delta h/\Delta t)$ contra ln h.

h	t	$-\Delta h$	Δt	$\ln\left(\frac{-\Delta h}{\Delta t}\right)$	$\ln h$
12	0				2.5
		1	5.9	−1.78	
11	5.9				2.4
		1	5.4	−1.69	
10	11.3				2.3
		1	5.9	−1.78	
9	17.2				2.2
		1	6.0	−1.79	
8	23.2				2.1
		1	6.5	−1.87	
7	29.7				1.95
		1	6.5	−1.87	
6	36.2				1.8
		1	7.3	−1.99	
5	43.5				1.6
		1	7.5	−2.02	
4	51.0				1.4
		1	9.0	−2.20	
3	60.0				1.1
		1	10.7	−2.37	
2	70.7				0.69
		1	14.0	−2.64	
1	84.2				0

los datos son buenos y no están muy espaciados, cualquier intento para estimar k mediante la intercepción dará una exactitud extremadamente pobre. Para los datos mostrados aquí puede esperarse que los errores en k sean del 20 por ciento debido a la dispersión alrededor del valor medio. La ecuación del sistema deberá integrarse para obtener el valor del parámetro h.

2.5 CONCLUSIONES

El ejemplo del simple vaciado de un tanque se ha explicado para demostrar algunas de las dificultades que se encuentran en el proceso del análisis, en una situación de sobra conocida; así como para señalar algunos conocimientos que pueden obtenerse del problema. En situaciones más complejas hay el mismo tipo de dificultades, aun cuando la solución puede no ser tan sencilla. Para entender el proceso será esencial efectuar un análisis cuidadoso. En los próximos capítulos se ampliará el estudio del análisis mediante ejemplos de ingeniería química de complejidad creciente, de tal manera que la teoría y los conceptos generales se conviertan en herramientas de operación práctica.

2.6 PROBLEMAS

2.1 En el problema del vaciado del tanque fue necesario definir la relación entre q y h, antes de lograr una descripción matemática de la situación física. Considere las siguientes relaciones y su aplicación al problema del vaciado de un tanque.

(a) $q = \dfrac{k}{h}$

(b) $q = M \operatorname{sen} h$

(c) $q = kh^3$

(d) $q = C_1 + C_2h + C_3h^2$

(e) $q = \dfrac{k_1}{1 + k_2h}$

2.2 Utilizando los incisos (a) hasta (e) del problema 2.1, determine h como una función de t, sustituyéndola en la ecuación 2.2 e integre. (Puede ser de utilidad consultar una tabla de integrales.)

2.3 Encuentre q como una función de t para cada modelo del capítulo. [Nota: ya se conoce $q(h)$ y $h(t)$.]

2.4 Los siguientes datos fueron obtenidos en un receptáculo cilíndrico con un diámetro de 1.0 plg., que fue drenado a través de un orificio de 0.043 plg. de diámetro. Grafique estos datos como h con respecto a t, y encuentre la pendiente de la línea recta que pasa a través de los seis primeros puntos. Utilizando la ecuación 2.5, escriba la expresión para h en función de t, utilizando el resultado de dicha gráfica. ¿Cuál es el error entre las alturas experimentales y las alturas previstas cuando $t=$ 10.0, 6.0, 4.0 y 2.0, seg.? ¿Cuál es el error cuando $t=100$ seg.?

Altura (pulgadas)	Tiempo (segundos)
15	0
14	6.0
13	12.2
12	18.7
11	25.5
10	32.7
9	40.3
8	48.3
7	56.7
6	66.1
5	76.2
4	87.6
3	101.0
2	117.5
1	140.7

2.5 Compruebe los datos del problema 2.4 con la descripción matemática obtenida cuando $q = bh$. Calcule b/A mediante el trazo de una línea recta a través de los primeros seis puntos al graficar ln h y t. ¿Cuál es el error entre los valores predichos y los experimentales, cuando t = 10.0, 6.0, 4.0, y 2.0, seg.? ¿Cuál es el error cuando t = 100 seg.?

2.6 Utilizando la expresión $q = kh^{1/2}$, encuentre el valor óptimo de k para los datos del problema 2.4.

2.7 Considere el problema del vaciado del tanque y formule la descripción matemática de h como h (t), si se supone que q es igual a kh^2. compruebe la respuesta con la ecuación 2.12. Como parte de su respuesta demuestre la deducción de la ecuación 2.12 a partir de la ecuación 2.11.

2.8 Un operador de una planta química vacía un tanque que originalmente contenía aceite crudo. El tanque mide 3 pies de diámetro y 10 pies de altura. El operador abre la válvula (cuyo diámetro es de 1.25 pulg.) que se encuentra en la base del tanque. El operador nota el cambio en el nivel del fluido a partir de la altura inicial hasta que baja a 6 pies y registra los siguientes datos:

Altura (pies)	Tiempo (segundos)
10.0	0
9.0	54.0
7.5	142.9
7.0	172.5
6.0	240.2

El operador considera que el flujo de salida es constante y sobre esta base desarrolla una ecuación del modelo que describe la altura del líquido en función del tiempo. El operador grafica los datos.

(a) ¿Cuál es la pendiente de la línea recta dibujada a través de los datos? ¿Cuál es su significado físico?

(b) ¿Cuánto tiempo requerirá el vaciado del tanque para este modelo matemático específico?

(c) Calcule las alturas correspondientes a los tiempos reales 20.0, 60.0, 100.0 y 150.0 seg.

2.9 El operador de la planta química del problema 2.8 no sabe que, $q(h) = kh^{1/2}$ para un flujo impulsado por una columna líquida:

(a) Existe la relación (que se estudiará más ampliamente en los capítulos 3 y 10 cuando se trate con la conservación de energía), $q = c_0 A_0 \sqrt{2gh}$ donde c_0 es un número adimensional conocido como coeficiente del orificio. Puede considerarse que el valor de c_0 es 0.61 y $g = 32.2$ pies/seg^2. ¿Cuál es el valor de k?

(b) Para este tanque en particular y para esta forma funcional de q, derive el modelo matemático que describe la situación y calcule las alturas correspondientes a $t = 20.0$, 60.0, 100, 150, 250, 850, y 1000 seg.

(c) Suponiendo que $q = kh^{1/2}$ es correcta, calcule el error que existe en h para los tiempos que se indican en el inciso (b), si se considera que $q = c$.

(d) Basándose en los resultados obtenidos en el inciso (c), ¿es bastante aproximado considerar que q es igual a una constante para un "tiempo corto", cuando menos para los primeros 2 1/2 min.?

(e) Compare los tiempos requeridos para completar el vaciado del tanque para ambos modelos.

2.10 Dibuje varias líneas de pendiente igual a 0.5 que considere agrupen los datos de la figura 2.7 y determine el valor de k para cada una de éstas. ¿Constituye este método una manera exacta para medir el valor de K?